ISSN0386-8257

臨時別冊・数理科学

SGCライブラリ 123

For Senior & Graduate Courses

量子測定と量子制御

沙川 貴大・上田 正仁　共著



サイエンス社

SGCライブラリ-123

量子測定と量子制御

沙川貴大・上田正仁 共著

サイエンス社

まえがき

本書は，量子測定，量子制御，および量子開放系のダイナミクスについて系統的に解説する試みである．孤立量子系のダイナミクスはユニタリ発展で記述されるが，環境との相互作用や測定などを伴う量子開放系のダイナミクスは非ユニタリとなる．近年目覚ましい発展を遂げつつある量子光学，冷却原子気体，およびメススコピック系の実験技術や，量子情報理論や量子制御理論の進展により，非ユニタリ発展の本格的な記述・分析がますます重要になってきている．にもかかわらず，量子開放系や量子測定のダイナミクスについて体系的に記述している和書は存在せず，これらについて学ぶためにはいろいろな参考文献を読みながら必要な知識を収拾する必要がある．このような状況を鑑みると，量子測定と制御の理解に必要な最低限の知識を系統的に解説するモノグラフの必要性が，高まってきているように思われる．本書執筆の動機はここにある．

本書は以下の章からなる．

第 1 章では，後の議論の前提知識となる量子論の基礎概念について復習する．1.1 節では，物理量，量子状態，およびそのユニタリ発展とボルンの確率規則について述べる．エンタングルメントや EPR 状態などの重要概念についても述べる．1.2 節では，合成系の一部分だけに着目した量子状態の記述を可能にする，混合状態という概念を導入する．混合状態を記述する密度演算子は，量子測定と制御において基本的な役割を果たす．1.3 節では，非ユニタリ過程を記述する上で最も重要な概念であるクラウス演算子と，その重要な性質である完全正値性について述べる．

第 2 章では量子測定の一般論と様々な具体例について述べる．2.1 節では，まず量子系を直接測定する射影測定について述べ，さらに系と相互作用をするプローブを測定することによって系の状態を知る間接測定のモデルについて述べる．2.2 節では，測定の誤差と反作用について議論する．特に，測りたい物理量が反作用を受けない量子非破壊測定（QND 測定）について述べる．2.3 節では，様々な不確定性関係について述べる．特に，被測定系が本来有する量子ゆらぎに起因する不確定性と，測定過程で生じる不確定性の二重構造について議論する．2.4 節では，位置と運動量，電磁場，スピン，光子数など典型的な物理量の測定モデルについて，実際の実験を念頭に置きながら具体的に解説する．2.5 節では，量子状態を推定するためのトモグラフィーという考え方について述べる．

量子論は古典論と異なり，一回の測定で系の状態を完全に知ることは出来ない．これは，測定データからそれを生み出す量子状態をどう推定すべきかという興味深い問題を提起する．第 3 章ではこの問題について議論する．3.1 節では準備として古典推定理論について述べ，3.2 節では量子推定理論とその不確定性関係などへの応用について述べる．

環境と相互作用する量子開放系が，非ユニタリかつマルコフ的に時間発展する状況は，量子マスター方程式で記述される．第 4 章ではこれについて詳しく解説する．4.1 節でまず簡単な形式論によって量子マスター方程式を導出する．4.2 節では具体例として二準位原子の時間発展を議論する．

4.3 節では，ミクロなハミルトニアンから出発して，ボルン・マルコフ近似などによって量子マスター方程式を導出する．4.4 節では電磁場を環境とする量子光学系への応用を議論する．4.5 節では，電子浴を環境とする量子ドットへの応用を議論する．

第 5 章では，量子系を連続的に測定した場合に，測定結果の情報に条件付けられた系の状態がどう時間発展するかを議論する．これは，測定がマルコフ的であれば，確率マスター方程式や確率シュレーディンガー方程式によって記述される．とくに，光子の直接検出，ホモダイン測定，ヘテロダイン測定について議論する．まず 5.1 節では，測定結果がポアソン過程によって記述される場合について議論する．次に 5.2 節では，その極限として得られるガウス過程に場合について議論し，それと古典推定理論におけるカルマンフィルタとの対応関係を議論する．

量子測定で得た結果に基づいて系を制御することは，量子フィードバック制御と呼ばれる．第 6 章ではこれについて議論する．6.1 節では量子フィードバック制御の基本的な考え方を述べる．6.2 節では，量子連続測定の結果に基づいて系をフィードバック制御したときのダイナミクスについて議論する．6.3 節では，古典最適制御理論の一般化として，量子系をどうやって最適制御するかを議論する．

マルコフ的な開放系の時間発展や量子連続測定についてより深い理解を得るためには，量子確率過程の考え方が重要になる．第 7 章ではこれについて詳しく解説し，とくに量子伊藤公式と呼ばれる計算規則を導入する．7.1 節では準備として連続自由度の電磁場について議論し，量子伊藤公式の簡単な導入を行う．7.2 節で量子確率過程を本格的に導入し，7.3 節ではそれを確率マスター方程式のミクロな導出に応用する．7.4 節では入力–出力フォーマリズムという形式を紹介する．7.5 節では量子確率解析についてより詳しく議論し，量子マスター方程式の別の導出を与える．

量子開放系の時間発展が非マルコフ的な場合は，マルコフ的な場合にはない興味深い現象が起こる．それについて第 8 章で議論する．8.1 節では，非マルコフ的に時間発展する系に対して量子連続測定を行うと，その系の時間発展が静止する，あるいは遅くなるという量子ゼノ効果について議論する．8.2 節では，非マルコフ的にデコヒーレンスする系に周期的に強いパルスをあてることで，環境へと散逸した情報が系に戻ってきてデコヒーレンスが抑制されるというダイナミカル・デカップリングについて議論する．

付録 A では，光と原子の量子状態や相互作用についてまとめる．A.1 節では光の量子状態について議論する．とくにコヒーレント状態やスクイズド状態，ウィグナー関数などについて述べる．A.2 節では光と原子の相互作用について議論する．とくにジェインズ・カミングス・モデルについて述べる．

付録 B では，古典確率過程や古典制御理論を解説する．B.1 節では，古典確率過程の入門的な議論を行う．とくにガウス過程における伊藤公式やフォッカー・プランク方程式を中心に解説する．ポアソン過程の伊藤公式についても述べる．B.2 節では，古典確率過程に対して測定を行って軌道を推定するための，カルマンフィルタについて述べる．B.3 節では，古典確率過程に対して最適なフィードバック制御を構築するための，最適制御理論について述べる．この付録 B だけで自己完結した解説を目指した．

このように本書では，量子測定と量子制御に関する現代的理論の骨格部分と，いろいろな具体例，さらにその背景にある古典制御理論の初歩が詳しく解説されている．この分野に関心のある研究者の方々や，これから研究を始める学生諸君の一助となれば幸いである．

本書のおおもとの素材は，沙川が2010年に東京大学物理学専攻の上田研究室および佐野研究室の一部のメンバーと行った自主ゼミのノートである．その後，沙川が京都大学基礎物理学研究所と大阪市立大学工学部で行った集中講義，東京大学で担当した二つの講義［大学院・総合文化研究科「量子制御理論」(2013年度) および統合自然科学科「情報と計算の物理」(2014年度)］の内容が本書のもとになっている．この自主ゼミ・講義の間にいただいた多くのコメントは本書に反映されている．また本書の草稿段階で，慶應義塾大学の山本直樹氏と，学習院大学の田崎晴明氏に，多くの貴重なコメントをいただいた．また，何人かの学生さんから誤植の指摘をいただいた．さらに，東京大学大学院・総合文化研究科の大学院生である箱嶋秀昭氏には，5.2.4節に掲載したシミュレーションのデータを提供していただいた．本書の執筆過程でお世話になった多くの方々に，ここにお礼申し上げる．最後に，本書の執筆を辛抱強くサポートしてくださったサイエンス社の平勢耕介氏にお礼申し上げる．

2015年12月

沙川貴大　上田正仁

目　次

第 1 章
量子論の基本概念

本章では，量子状態とそのダイナミクスを記述するための，基本的な概念について述べる．1.1 節では，量子論の初歩をディラック（Dirac）のブラケット記法を用いて復習する．1.2 節では，純粋状態と混合状態について解説し，密度演算子を導入する．1.3 節では，開放系のダイナミクスや測定過程など，非ユニタリ過程の記述に必要なクラウス演算子を導入する．

1.1 量子状態と物理量

1.1.1 状態ベクトルとボルンの確率規則

まず，量子状態の簡単な例として，スピン 1/2 の系を考える．ある方向（たとえば z 方向）にスピンが平行（これをアップという）である状態を $|\uparrow\rangle$，反平行（これをダウンという）である状態を $|\downarrow\rangle$ とする．量子論の顕著な特徴は，両者の**重ね合わせ状態**が許されることである．たとえば，$|\rightarrow\rangle := (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ という状態がありうる*1)．これはいわば，「スピンがアップかダウンか決まっていない状態」である．実際，この状態に対してスピンの z 方向の向きを測定すると，アップとダウンがそれぞれ 1/2 の確率で得られる．しかし，これは古典論でもありうる「アップかダウンか実際には決まっているが，我々がどちらか知らない状態」とは決定的に異なる．実際，状態 $|\rightarrow\rangle$ を x 方向で測定すると必ず x 軸の正の方向にスピンは見出されるが，古典的な場合はそのようなことは起こらない．すなわち状態 $|\rightarrow\rangle$ は，x 方向のスピンが正の向きに確実に決まっている純粋状態なのである．

上記に述べたことを一般的に定式化してみよう．量子系の状態を記述するうえで重要な概念は，その系に対応したヒルベルト空間（Hilbert space）である*2)．いま，$|\varphi\rangle$ と $|\psi\rangle$ をヒルベルト空間のベクトルとすると，両者の内積はディラックの記法で $\langle\psi|\varphi\rangle \in \mathbb{C}$ と

*1) ここで記号 := は左辺の量の定義が右辺で与えられることを意味する．

*2) ヒルベルト空間とは，複素数 $\mathbb{C}$ を係数とする，内積が定義された完備なベクトル空間のことである．簡単のために，本書の一般論ではヒルベルト空間は有限次元とする．なお具体例においては，位置と運動量など無限次元の場合を扱うこともあるが，有限次元と同様に計算して問題が生じない場合だけを扱う．

書かれる（ここで $\mathbb{C}$ は複素数全体の集合を表す）．ベクトル $|\psi\rangle$ のノルム（絶対値）は $\|\psi\| := \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$ である．ヒルベルト空間の単位ベクトル（すなわち，$\|\psi\| = 1$ を満たすベクトル）は，**状態ベクトル**と呼ばれ，対応する系の量子状態を記述する．なお，$|\psi\rangle$ と $e^{i\theta}|\psi\rangle$ は同じ量子状態を表す（θ は任意の実数）．すなわち，状態ベクトル全体にかかるグローバルな位相因子は，物理的意味をもたない*3)．同じ量子状態を表すベクトルをまとめて射（ray）という．

さて，ヒルベルト空間の基底 $\{|\phi_k\rangle\}$ が**正規直交基底**であるとは，基底ベクトルが規格化されていて，お互いに直交していることである:

$$\langle\phi_k|\phi_l\rangle = \delta_{kl}. \tag{1.1}$$

ここで δ_{kl} は，$k = l$ のときは $\delta_{kl} = 1$，$k \neq l$ のときは $\delta_{kl} = 0$ なる値をとるクロネッカー（Kronecker）のデルタである．任意の状態ベクトル $|\psi\rangle$ は，基底 $\{|\phi_k\rangle\}$ で展開して

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k|\phi_k\rangle \tag{1.2}$$

と書ける．複素数 c_k は**確率振幅**と呼ばれ，状態ベクトルの規格化条件より

$$\sum_k |c_k|^2 = 1 \tag{1.3}$$

を満たす．

次に，$|\phi_k\rangle\langle\phi_k|$ という演算子を定義しよう．これは，ベクトルを $|\phi_k\rangle$ に平行な一次元空間に射影する**射影演算子**である．たとえば，(1.2) に左から $|\phi_k\rangle\langle\phi_k|$ を作用させると，

$$|\phi_k\rangle\langle\phi_k|\psi\rangle = c_k|\phi_k\rangle \tag{1.4}$$

となる．また，正規直交基底は**完全性条件**を満たす:

$$\sum_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k| = \hat{I}. \tag{1.5}$$

ここで $\hat{I}$ はヒルベルト空間の単位演算子である．実際，任意の $|\psi\rangle$ に対して

$$\left(\sum_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k|\right)|\psi\rangle = \sum_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k|\psi\rangle = \sum_k c_k|\phi_k\rangle = |\psi\rangle \tag{1.6}$$

なので，(1.5) が確かめられる．また，ヒルベルト空間に作用する任意の演算子 $\hat{A}$ は，正規直交基底 $\{|\phi_k\rangle\}$ を用いて

$$\hat{A} = \sum_{kl} \alpha_{kl}|\phi_k\rangle\langle\phi_l| \tag{1.7}$$

と展開できることが，(1.5) を用いて確かめられる．ここで

$$\alpha_{kl} = \langle\phi_k|\hat{A}|\phi_l\rangle \tag{1.8}$$

*3) 状態ベクトルの全体ではなくある成分だけにかかる位相因子（すなわち，異なる基底ベクトル間の相対位相）は，観測可能な物理的意味をもつ．

である．これを $\hat{A}$ の行列表示という．また，演算子 $\hat{A}$ の**エルミート共役**（**Hermite conjugate**）を $\hat{A}^\dagger$ と書く．ここでエルミート共役とは，任意の $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ に対して

$$\langle\phi|\hat{A}^\dagger|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle^* \tag{1.9}$$

を満たす演算子のことである（$*$ は複素共役を表す）．式 (1.8) より，行列表示では，エルミート共役とはもとの演算子を転置して複素共役をとったものであることが分かる．

さて，**エルミート演算子**とは，$\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ を満たす演算子である．エルミート演算子は対角化可能で，その固有値はすべて実数であり，異なる固有値に対応する固有空間は直交することが知られている．すなわち，$\hat{A}$ は

$$\hat{A} = \sum_k \alpha_k \hat{P}_k \tag{1.10}$$

とスペクトル分解できる*4)．ここで α_k は $\hat{A}$ の固有値，$\hat{P}_k$ は α_k に対応する固有空間への射影演算子である．なお，$k \neq l$ なら $\alpha_k \neq \alpha_l$ とする．固有空間はお互いに直交しており，冪等条件 $\hat{P}_k^2 = \hat{P}_k$ を満たすので，

$$\hat{P}_k \hat{P}_l = \delta_{kl} \hat{P}_k \tag{1.11}$$

が成り立つ．さらに $\hat{P}_k$ は次の**完全性条件**を満たす:

$$\sum_k \hat{P}_k = \hat{I}. \tag{1.12}$$

α_k に対応する固有空間の正規直交基底を $\{|\phi_{ki}\rangle\}$ とすると，$\hat{P}_k = \sum_i |\phi_{ki}\rangle\langle\phi_{ki}|$ と書ける．ここで添字 i は，縮退した固有値に対応する固有状態を識別するラベルである．とくに，α_k の固有空間が一次元ならば，対応する固有ベクトル $|\phi_k\rangle$ を用いて $\hat{P}_k = |\phi_k\rangle\langle\phi_k|$ と書ける．

スピンなど量子系の物理量は，ヒルベルト空間に作用するエルミート演算子で記述されることが知られている．物理量に対応するエルミート演算子のことを**オブザーバブル**（**observable**），あるいは単に**物理量**と呼ぶ．ここで物理量に対する**誤差のない測定**について考えよう．状態ベクトルが $|\psi\rangle$ のときに，(1.10) のようにスペクトル分解される物理量 $\hat{A}$ を誤差なく測定する．このとき，$\hat{A}$ の固有値のうち一つが測定結果として得られる．そして，α_k が得られる確率は

$$p(k) = \langle\psi|\hat{P}_k|\psi\rangle \tag{1.13}$$

で与えられる．(1.13) を**ボルンの確率規則**（**Born's rule**）という．なお，(1.13) の右辺は，$|\psi\rangle$ を $e^{\mathrm{i}\theta}|\psi\rangle$ としても変化しない（このとき，$\langle\psi|$ は $\langle\psi|e^{-\mathrm{i}\theta}$ となることに注意しよう）．このことは，状態ベクトル全体にかかるグローバルな位相因子が物理的意味をもたないことと整合している．

とくに，固有値に縮退がなく，すべての α_k の固有空間が一次元のときを考えよう．こ

---

*4) ヒルベルト空間が無限次元の場合は，エルミート性と**自己共役**（**self-adjoint**）性は異なる概念になる．スペクトル分解の可能性を保証するのは，エルミート性ではなく自己共役性である．しかし，有限次元の場合は両者は一致する．詳しくは [5], [6] などを参照．

のとき $\hat{P}_k=|\phi_k\rangle\langle\phi_k|$ と書けて，状態ベクトルは $|\psi\rangle=\sum_k c_k|\phi_k\rangle$ と展開できる．したがって，(1.13) は

$$p(k)=|\langle\phi_k|\psi\rangle|^2=|c_k|^2 \tag{1.14}$$

となる．すなわち，測定結果を得る確率は，対応する確率振幅の絶対値の二乗で与えられる．

一般にボルンの確率規則から，物理量 $\hat{A}$ の期待値は

$$\langle A\rangle:=\sum_k p(k)\alpha_k=\sum_k\langle\psi|\alpha_k\hat{P}_k|\psi\rangle=\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle \tag{1.15}$$

で与えられる．また，確率の和は

$$\sum_k p(k)=\sum_k\langle\psi|\hat{P}_k|\psi\rangle=\langle\psi|\psi\rangle=1 \tag{1.16}$$

を満たしている．ここで $\sum_k\hat{P}_k=\hat{I}$ および $\langle\psi|\psi\rangle=1$ を用いた．すなわち，固有ベクトルが完全系であることと，状態ベクトルが 1 に規格化されていることが，確率の和が 1 であることを保証している．

なお (1.13) は，(1.15) において $\hat{A}=\hat{P}_k$ とおいた式と見ることもできる．すなわち，射影演算子 $\hat{P}_k$ の期待値は，対応する確率 $p(k)$ を与える．したがって，ボルンの確率規則 (1.13) は (1.15) の特別な場合と考えることもできる．

式 (1.10) から分かるように，物理量 $\hat{A}$ は，固有値 $\{\alpha_k\}$ と射影演算子 $\{\hat{P}_k\}$ の組から構成される．以下ではしばしば，測定結果 α_k のことを単に "k" と呼ぶ．また，α_k の具体的な値が重要ではなく，k のみを知れば十分であることがしばしばある．このとき，物理量 $\hat{A}$ の測定のことを，射影演算子 $\{\hat{P}_k\}$ の測定と呼ぶ．また，射影演算子がすべて $\hat{P}_k=|\phi_k\rangle\langle\phi_k|$ と書けるときは，物理量 $\hat{A}$ の測定のことを，正規直交基底 $\{|\phi_k\rangle\}$ の測定と呼ぶ．

1.1.2 キュービットとパウリ演算子

重要な具体例として，ヒルベルト空間が二次元の場合を考える．これはたとえば，スピン 1/2 の系や，光の偏光自由度などを記述することができる．このような系は，古典的な情報理論におけるビット（bit）とのアナロジーで，量子ビットあるいは**キュービット**（**qubit**）と呼ばれる．その正規直交基底を，古典ビット $\{0,1\}$ とのアナロジーで，$\{|0\rangle,|1\rangle\}$ と書く．このヒルベルト空間に作用する三つの演算子を，

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_x&:=|0\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 0|,\\ \hat{\sigma}_y&:=\mathrm{i}|0\rangle\langle 1|-\mathrm{i}|1\rangle\langle 0|,\\ \hat{\sigma}_z&:=|1\rangle\langle 1|-|0\rangle\langle 0|,\end{aligned} \tag{1.17}$$

と定義する．ここで i は虚数単位である．これらは**パウリ演算子**（**Pauli operators**）と呼ばれる．$|0\rangle$ は $\hat{\sigma}_z$ の -1 の固有状態，$|1\rangle$ は $\hat{\sigma}_z$ の $+1$ の固有状態である．パウリ演算子を基底 $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ で行列表示すると

$$\hat{\sigma}_x=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\ \hat{\sigma}_y=\begin{bmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{bmatrix},\ \hat{\sigma}_z=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix} \tag{1.18}$$

と書ける．また，基底の完全性条件より，単位演算子 $\hat{I}$ は

$$\hat{I} = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \tag{1.19}$$

と書ける．

パウリ演算子はいずれもエルミート演算子である．また，$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = \hat{I}$ を満たす．したがって $\hat{\sigma}_i^{-1} = \hat{\sigma}_i^\dagger$ であり，パウリ演算子はユニタリ演算子でもある*5)．また，パウリ演算子は交換関係

$$[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = 2\mathrm{i}\hat{\sigma}_z,\ [\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z] = 2\mathrm{i}\hat{\sigma}_x,\ [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x] = 2\mathrm{i}\hat{\sigma}_y \tag{1.20}$$

を満たす．ここで，エディントン (Eddington) のイプシロン ε_{ijk} ($\varepsilon_{xyz} = \varepsilon_{yzx} = \varepsilon_{zxy} = 1$, $\varepsilon_{zyx} = \varepsilon_{yxz} = \varepsilon_{xzy} = -1$，それ以外の ε_{ijk} は 0) を使うと，これらの交換関係はまとめて

$$[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2\mathrm{i} \sum_{k=x,y,z} \varepsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k \tag{1.21}$$

と書ける．

二次元のヒルベルト空間に作用する任意のエルミート演算子 $\hat{A}$ は，四つの実数 (a_0, a_x, a_y, a_z) を用いて

$$\hat{A} = a_0\hat{I} + \sum_{i=x,y,z} a_i\hat{\sigma}_i \tag{1.22}$$

と展開できる．とくに $a_0 = 0$ の場合を考える．このとき，$\hat{A}$ は三次元実ベクトル $\vec{a} := (a_x, a_y, a_z)$ で特徴づけられる:

$$\hat{\sigma}_{\vec{a}} := \sum_{i=x,y,z} a_i\hat{\sigma}_i. \tag{1.23}$$

さらに $a := \|\vec{a}\| = 1$ のとき，(1.23) は「$\vec{a}$ 方向のパウリ演算子」とみることができる．とくに，$\vec{a}$ が i 軸方向（$i = x, y, z$）の単位ベクトルのとき，$\hat{\sigma}_{\vec{a}}$ は $\hat{\sigma}_i$ と一致する．また，$\vec{a}$ を極座標表示すると，

$$a_x = a\sin\theta\cos\varphi,\ a_y = a\sin\theta\sin\varphi,\ a_z = a\cos\theta \tag{1.24}$$

となる．このとき，$\hat{\sigma}_{\vec{a}}$ の固有値 $+a$，$-a$ に対応する規格化された固有ベクトルは，それぞれ，

$$|+a\rangle = e^{\mathrm{i}\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|0\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|1\rangle,\ |-a\rangle = -e^{\mathrm{i}\varphi}\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \tag{1.25}$$

で与えられる（グローバルな位相因子は無視した）．このことは，(1.23) に右から $|\pm a\rangle$ をかけると

$$\hat{\sigma}_{\vec{a}}|+a\rangle = |+a\rangle,\ \hat{\sigma}_{\vec{a}}|-a\rangle = -|-a\rangle \tag{1.26}$$

となることから確かめられる．1.2 節でさらに詳しく議論するように，三次元実ベクトル $(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ は状態ベクトルを三次元実ベクトル空間で表示する方法を

*5) 一般に，演算子 $\hat{U}$ がユニタリであるとは，$\hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{I}$ を満たすこと，すなわち $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$ となることである．任意の二つのベクトルの内積を不変に保つ演算子は，ユニタリ演算子のみであることが知られている．

与えており，ブロッホベクトル（**Bloch vector**）と呼ばれる．

1.1.3　量子系の時間発展

次に，量子状態のダイナミクスを考える．外界と相互作用しない孤立系の時間発展は，次のシュレーディンガー方程式（**Schrödinger equation**）で記述される．すなわち，系のエネルギーに対応するオブザーバブルであるハミルトニアンを $\hat{H}$ とすると，状態ベクトル $|\psi(t)\rangle$ の時間発展は

$$
\mathrm{i}\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle \tag{1.27}
$$

に従う．ここで $\hbar$ はプランク定数である．式 (1.27) は線形微分方程式なので，形式的に解けて，解は

$$
|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t\right)|\psi(0)\rangle \tag{1.28}
$$

と書ける．ここで

$$
\hat{U}(t) := \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t\right) \tag{1.29}
$$

とおくと，$\hat{U}(t)$ はユニタリ演算子である．実際，$\hat{H}$ がエルミート演算子なので

$$
\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t\right)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t\right) = \hat{I} \tag{1.30}
$$

となる．同様に $\hat{U}(t)\hat{U}^\dagger(t) = \hat{I}$ も示される．ここから

$$
\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)|\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t)|\psi(0)\rangle = \langle\psi(0)|\psi(0)\rangle \tag{1.31}
$$

が分かる．すなわち，状態ベクトルのノルムはユニタリ時間発展で変化しないことが分かる．

ハミルトニアンはエルミート演算子なので，

$$
\hat{H} = \sum_k E_k|\phi_k\rangle\langle\phi_k| \tag{1.32}
$$

とスペクトル分解できる．ここで $\{E_k\}$ には縮退があってもいい．$|\psi(0)\rangle$ をエネルギー基底で展開して

$$
|\psi(0)\rangle = \sum_k c_k|\phi_k\rangle \tag{1.33}
$$

と書く．このとき，(1.28) は

$$
|\psi(t)\rangle = \sum_k c_k e^{-\mathrm{i}E_k t/\hbar}|\phi_k\rangle \tag{1.34}
$$

となる．ここで

$$
|c_k|^2 = |c_k e^{-\mathrm{i}E_k t/\hbar}|^2 \tag{1.35}
$$

なので，エネルギーの確率分布は変化しない．

次に，ハミルトニアンに含まれるパラメータである外場（磁場など）が時間変化している場合を考える．このとき，ハミルトニアンは $\hat{H}(t)$ のように時間依存しうる．このときのシュレーディンガー方程式は

$$\mathrm{i}\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\psi(t)\rangle \tag{1.36}$$

と書ける．いまの場合，一般に異なった時刻のハミルトニアンは可換ではないので，解は (1.28) のように書くことができない．そのかわり，時間順序積で与えられる時間発展演算子

$$\begin{aligned}\hat{U}(t) &:= \mathrm{T}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t \hat{H}(t')dt'\right) \\ &:= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-\mathrm{i}}{\hbar}\right)^n \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}(t_1)\cdots\hat{H}(t_n)\end{aligned} \tag{1.37}$$

を用いて

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle \tag{1.38}$$

と書ける．なお，時間順序積は

$$\mathrm{T}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t \hat{H}(t')dt'\right) = \lim_{N\to\infty}\mathrm{T}\prod_{n=0}^{N-1}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(n\Delta t)\Delta t\right) \tag{1.39}$$

とも書ける．ここで $\Delta t := t/N$ である．無限小の時間でシュレーディンガー方程式を積分したものを，時間順序に従ってかけ合わせたものが解を与えると解釈できる．(1.39) から，$\hat{U}(t)$ がユニタリ演算子であることが確かめられる．なお，$\hat{U}(t)$ の時間微分は

$$\mathrm{i}\hbar\frac{d}{dt}\hat{U}(t) = \hat{H}(t)\hat{U}(t) \tag{1.40}$$

で与えられる．

これまでは，状態ベクトルが時間発展するという**シュレーディンガー表示**（**Schrödinger picture**）を考えてきた．この表示ではオブザーバブルは時間発展しない．次に，状態ベクトルは時間発展せず，物理量が時間発展する**ハイゼンベルク表示**（**Heisenberg picture**）を考える．オブザーバブル $\hat{A}$ の，ハイゼンベルク表示での時刻 t の値は

$$\hat{A}(t) = \hat{U}^\dagger(t)\hat{A}\hat{U}(t) \tag{1.41}$$

となる．実際，これの初期状態 $|\psi\rangle$ での期待値を考えると，

$$\langle\psi|\hat{A}(t)|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{U}^\dagger(t)\hat{A}\hat{U}(t)|\psi\rangle = \langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle \tag{1.42}$$

となり，シュレーディンガー表示で求めたものと一致する．この意味で二つの表示は等価である．式 (1.41) を t で微分して，(1.40) を用いると

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{A}(t)}{dt} &= \frac{d\hat{U}^\dagger(t)}{dt}\hat{A}\hat{U}(t) + \hat{U}^\dagger(t)\hat{A}\frac{d\hat{U}(t)}{dt} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(t)\hat{U}^\dagger(t)\hat{A}\hat{U}(t) - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{U}^\dagger(t)\hat{A}\hat{U}(t)\hat{H}(t)\end{aligned} \tag{1.43}$$

となる．すなわち，$\hat{A}(t)$ が満たす微分方程式は

$$\frac{d\hat{A}(t)}{dt} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H}(t), \hat{A}(t)] \tag{1.44}$$

である．ここで，交換子

$$[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \tag{1.45}$$

を定義した．(1.44) は**ハイゼンベルク方程式**と呼ばれる．

次に，シュレーディンガー表示とハイゼンベルク表示のいわば中間である**相互作用表示**（**interaction picture**）を導入する．これは，第 4 章で量子マスター方程式を議論する際に有用である．ハミルトニアンを二つの部分 $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\rm int}$ に分ける．たとえば，$\hat{H}_{\rm int}$ は外部からの摂動や，粒子間相互作用にとることが多い．このとき，相互作用表示での状態ベクトル $|\psi^{\rm I}(t)\rangle$ と物理量 $\hat{A}^{\rm I}(t)$ はそれぞれ

$$|\psi^{\rm I}(t)\rangle := \exp\left(\frac{\rm i}{\hbar}\hat{H}_0 t\right)|\psi(t)\rangle \tag{1.46}$$

$$\hat{A}^{\rm I}(t) := \exp\left(\frac{\rm i}{\hbar}\hat{H}_0 t\right)\hat{A}\exp\left(-\frac{\rm i}{\hbar}\hat{H}_0 t\right) \tag{1.47}$$

となる．ここで $|\psi(t)\rangle$ と $\hat{A}$ はそれぞれ，シュレーディンガー表示の状態ベクトルと物理量である．なお，相互作用表示の量であることを明示するため，上付き添え字記号 $^{\rm I}$ を付けた．ここで，$\hat{H}_{\rm int}$ の相互作用表示 $\hat{H}^{\rm I}_{\rm int}(t)$ も，(1.47) と同様に定義する．(1.46) をシュレーディンガー方程式 (1.27) に代入することで，$|\psi^{\rm I}(t)\rangle$ の従う方程式

$$\mathrm{i}\hbar\frac{d}{dt}|\psi^{\rm I}(t)\rangle = \hat{H}^{\rm I}_{\rm int}(t)|\psi^{\rm I}(t)\rangle \tag{1.48}$$

を得る．この形式解は，$|\psi^{\rm I}(t)\rangle$ の定義からも明らかなように

$$|\psi^{\rm I}(t)\rangle = \exp\left(\frac{\rm i}{\hbar}\hat{H}_0 t\right)\exp\left(-\frac{\rm i}{\hbar}\hat{H}t\right)|\psi(0)\rangle \tag{1.49}$$

となる．なお，$\hat{A}^{\rm I}(t)$ の従う方程式は

$$\frac{d\hat{A}^{\rm I}(t)}{dt} = \frac{\rm i}{\hbar}[\hat{H}_0, \hat{A}^{\rm I}(t)] \tag{1.50}$$

である．すなわち，相互作用表示とは，$\hat{H}_0$ の分だけハイゼンベルク表示にして，$\hat{H}_{\rm int}$ の分だけシュレーディンガー表示にした形式だと言える*6)．

1.1.4 合成系の状態

二つの量子系があるとき，その合成系の状態を記述する方法を考える．二つの部分系を A と B として，それぞれに対応するヒルベルト空間を $\mathbf{H}_{\rm A}$ と $\mathbf{H}_{\rm B}$ とする．また，$\mathbf{H}_{\rm A}$ の正規直交基底を $\{|\psi_i\rangle\}$，$\mathbf{H}_{\rm B}$ の正規直交基底を $\{|\phi_j\rangle\}$ とする．いま，A の状態が $|\psi_i\rangle$ で B の状態が $|\phi_j\rangle$ のとき，合成系の状態を

$$|\psi_i\rangle \otimes |\phi_j\rangle, \tag{1.51}$$

あるいはより簡単な記法で

$$|\psi_i\rangle|\phi_j\rangle \tag{1.52}$$

*6) この表示で，ハミルトニアンのうち厳密に解ける部分を $\hat{H}_0$ に選び，そうでない残りの部分を $\hat{H}_1$ として，後者を摂動論的に解くことで系統的な近似法が得られる．

と書くことにしよう．これは $|\psi_i\rangle$ と $|\phi_j\rangle$ の**テンソル積**である．

重ね合わせの原理により，(1.52) のような状態の重ね合わせも，合成系の状態である*7)．したがって，$\{|\psi_i\rangle|\phi_j\rangle\}$ が合成系のヒルベルト空間の基底となる．内積を

$$\langle\psi_{i'}|\langle\phi_{j'}|\psi_i\rangle|\phi_j\rangle = \delta_{ii'}\delta_{jj'} \tag{1.53}$$

と定義すると，これは正規直交基底となる．この基底で張られる合成系のヒルベルト空間を $\mathbf{H}_\mathrm{A}\otimes\mathbf{H}_\mathrm{B}$ と書き，$\mathbf{H}_\mathrm{A}$ と $\mathbf{H}_\mathrm{B}$ のテンソル積空間という．$\mathbf{H}_\mathrm{A}$ が N 次元で $\mathbf{H}_\mathrm{B}$ が M 次元ならば，$\mathbf{H}_\mathrm{A}\otimes\mathbf{H}_\mathrm{B}$ は NM 次元である．

一般に，合成系の状態ベクトルは，c_{ij} を複素数として

$$\sum_{ij} c_{ij}|\psi_i\rangle|\phi_j\rangle \tag{1.54}$$

と書ける．規格化条件は $\sum_{ij}|c_{ij}|^2 = 1$ である．とくに，系 A の状態が $|\psi\rangle := \sum_i a_i|\psi_i\rangle$，系 B の状態が $|\phi\rangle := \sum_j b_j|\phi_j\rangle$ のとき，合成系の状態は

$$|\psi\rangle|\phi\rangle = \sum_{ij} a_i b_j|\psi_i\rangle|\phi_j\rangle \tag{1.55}$$

となる．(1.55) のように，合成系の状態が部分系の状態の積で書かれているとき，合成系の状態は**積状態**（**product state**）であるという．合成系の状態が純粋状態の場合は，積状態のことをセパラブル（**separable**）状態とも呼ぶ*8)．セパラブルでない状態は**エンタングルしている**（**entangled**）という．たとえば，

$$\sum_i c_i|\psi_i\rangle|\phi_i\rangle \tag{1.56}$$

は，(1.55) の左辺のように積の形では書けないので，エンタングルしている．

具体例として 2 キュービット系（四次元ヒルベルト空間）を考える．この空間の正規直交基底は，たとえば

$$\{\ |0\rangle|0\rangle,\ |0\rangle|1\rangle,\ |1\rangle|0\rangle,\ |1\rangle|1\rangle\ \} \tag{1.57}$$

ととれる．これらは，いずれもセパラブルな状態である．一方，次の 4 個のベクトルも，ヒルベルト空間の正規直交基底をなす:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle),\\ &\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle).\end{aligned} \tag{1.58}$$

これらはいずれもエンタングルした状態で，**ベル**（**Bell**）**状態**もしくは **EPR**（**Einstein-Podolsky-Rosen**）**状態**と呼ばれる．エンタングルした状態においては，2 個のキュービットに相関がある．たとえば，(1.58) の一行目のいずれの状態においても，左側のキュービットの状態が $|0\rangle$（$|1\rangle$）なら右側も $|0\rangle$（$|1\rangle$）になっている．これが量子的な重ね合わ

*7) 現実の物理系では，重ね合わせの状態が許されないような状況が存在する．たとえば，原子数や電荷の異なった状態を重ね合わせることはできない．これを超選択則という．本書では，簡単のため超選択則は考えないものとする．

*8) 次節で議論するように，混合状態の場合は，積状態とセパラブル状態は異なる概念である．

せのレベルで起きているので，この相関は量子相関と呼ばれる*9)．

さて一般に，系 A の演算子は $\hat{A} = \sum_{ij} \alpha_{ij}|\psi_i\rangle\langle\psi_j|$，系 B の演算子は $\hat{B} = \sum_{mn} \beta_{mn}|\phi_m\rangle\langle\phi_n|$ と書ける．これらの演算子のテンソル積を

$$\hat{A}\otimes\hat{B} = \sum_{ijmn} \alpha_{ij}\beta_{mn}|\psi_i\rangle\langle\psi_j|\otimes|\phi_m\rangle\langle\phi_n| = \sum_{ijmn} \alpha_{ij}\beta_{mn}|\psi_i\rangle|\phi_m\rangle\langle\psi_j|\langle\phi_n| \quad (1.59)$$

と定義すると，これは合成系の演算子である．ここで中辺から右辺へは，単にブラケットの順序を並べ替えて書いただけである．なお，記号 $\otimes$ を省略することもある．$\hat{A}\otimes\hat{B}$ は，合成系の状態 (1.54) に

$$\hat{A}\otimes\hat{B}\left(\sum_{ij} c_{ij}|\psi_i\rangle|\phi_j\rangle\right) = \sum_{ij} c_{ij}\hat{A}|\psi_i\rangle\otimes\hat{B}|\phi_j\rangle \quad (1.60)$$

のように作用する．

一般に合成系の演算子は，各々の部分系の適当な演算子 $\{\hat{A}_k\}$ と $\{\hat{B}_k\}$ を用いて

$$\hat{C} = \sum_k \hat{A}_k\otimes\hat{B}_k \quad (1.61)$$

と書ける．これは合成系の状態 (1.54) に

$$\hat{C}\left(\sum_{ij} c_{ij}|\psi_i\rangle|\phi_j\rangle\right) = \sum_k\sum_{ij} c_{ij}\hat{A}_k|\psi_i\rangle\otimes\hat{B}_k|\phi_j\rangle \quad (1.62)$$

のように作用する．また，(1.59) より合成系の演算子 $\hat{C}$ は

$$\hat{C} = \sum_{ijmn} \gamma_{ijmn}|\psi_i\rangle\langle\psi_j|\otimes|\phi_m\rangle\langle\phi_n| = \sum_{ijmn} \gamma_{ijmn}|\psi_i\rangle|\phi_m\rangle\langle\psi_j|\langle\phi_n| \quad (1.63)$$

のようにも書ける．ここで γ_{ijmn} は任意の複素数である．(1.63) において，添え字をまとめて $k := (i,j,m,n)$ と書いて，$\hat{A}_k := \gamma_{ijmn}|\psi_i\rangle\langle\psi_j|$，$\hat{B}_k := |\phi_m\rangle\langle\phi_n|$ とおけば，(1.61) の形に帰着する．

具体例として，2 キュービット系を考えよう．たとえば $\hat{\sigma}_x\otimes\hat{\sigma}_x$ は

$$\hat{\sigma}_x\otimes\hat{\sigma}_x|0\rangle|0\rangle = |1\rangle|1\rangle,\ \hat{\sigma}_x\otimes\hat{\sigma}_x|1\rangle|1\rangle = |0\rangle|0\rangle \quad (1.64)$$

等のように作用する．これをベル状態の一つに作用させると

$$\hat{\sigma}_x\otimes\hat{\sigma}_x(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) = |0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle \quad (1.65)$$

となる．同様に，

$$\hat{\sigma}_z\otimes\hat{\sigma}_z(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) = |0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle \quad (1.66)$$

も成立する．すなわち，$|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle$ は，$\hat{\sigma}_x\otimes\hat{\sigma}_x$ と $\hat{\sigma}_z\otimes\hat{\sigma}_z$ の固有値 $+1$ の同時固有

*9) 厳密には，量子相関とエンタングルメントの間には少し概念的な違いがある．エンタングルメントよりも広い意味での量子相関は**量子ディスコード**（**quantum discord**）として知られている．詳しくは [33] を参照．

状態である．$\hat{\sigma}_x$ と $\hat{\sigma}_z$ は互いに交換しないので，両者の同時固有状態は存在しないが，2 キュービットのテンソル積は互いに交換するため，同時固有状態が存在する．

また，より複雑で重要な例として，次の二つの演算子を考える．

CNOT ゲート

まず，

$$\hat{C} = |0\rangle\langle 0| \otimes \hat{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes \hat{\sigma}_x \tag{1.67}$$

という演算子を考える．これは，左側のキュービットが状態 $|1\rangle$ のときだけ，右側のキュービットに $\hat{\sigma}_x$ をかける（すなわち $|0\rangle$ と $|1\rangle$ を反転させる）演算を行う．これは，古典情報理論における **CNOT ゲート（Controlled NOT gate）**の量子版なので，CNOT 演算子と呼ばれる．左側のキュービットは制御（control）キュービット，右側は標的（target）キュービットと呼ばれる．これは基底に対して

$$\begin{aligned} &\hat{C}|0\rangle|0\rangle = |0\rangle|0\rangle,\ \hat{C}|0\rangle|1\rangle = |0\rangle|1\rangle \\ &\hat{C}|1\rangle|0\rangle = |1\rangle|1\rangle,\ \hat{C}|1\rangle|1\rangle = |1\rangle|0\rangle \end{aligned} \tag{1.68}$$

と作用する．したがって，たとえば

$$\hat{C}(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle)|0\rangle = c_0|0\rangle|0\rangle + c_1|1\rangle|1\rangle \tag{1.69}$$

となる．すなわち，CNOT 演算子には，セパラブル状態をエンタングルさせる働きがある．なお，$\hat{C}^\dagger = \hat{C}$ かつ $\hat{C}^2 = \hat{I} \otimes \hat{I}$ なので，CNOT 演算子はエルミートかつユニタリである．

SWAP ゲート

次に，下記のように基底に作用するユニタリ演算子 $\hat{S}$ を考える:

$$\begin{aligned} &\hat{S}|0\rangle|0\rangle = |0\rangle|0\rangle,\ \hat{S}|0\rangle|1\rangle = |1\rangle|0\rangle \\ &\hat{S}|1\rangle|0\rangle = |0\rangle|1\rangle,\ \hat{S}|1\rangle|1\rangle = |1\rangle|1\rangle. \end{aligned} \tag{1.70}$$

これは左右のキュービットの状態を入れ替えるので，**SWAP ゲート**の量子版である．

1.2　混合状態と密度演算子

1.2.1　純粋状態と混合状態

前節で議論した重ね合わせ状態，たとえば「スピンがアップとダウンの重ね合わせ状態」は，「スピンがアップかダウンか**決まっていない**状態」であった．これは量子論特有の概念である．一方で，古典論でもありうる「アップかダウンか**分からない**状態」のような場合を考えよう．これは，状態ベクトルが一意に定まっておらず，「確率 q_i で状態ベクトルが $|\psi_i\rangle$ である」という場合である．このようなとき，量子系の状態は**混合状態（mixed state）**であるという．言い換えると，「古典的な「サイコロ」をふって，確率 q_i で "i" が出たら，量子状態 $|\psi_i\rangle$ を準備する」という操作で作られる状態が，混合状態である．この操作を「量子状態 $\{|\psi_i\rangle\}$ を古典確率分布 $\{q_i\}$ で混合する」ともいう．一方で，状態ベクトルが確率 1 で定まっている状態を，**純粋状態（pure state）**という．混合状態を記述

するためには以下で導入する**密度演算子（density operator）**が必要である*10)．

1.2.2 密度演算子

量子系の状態ベクトルが，確率 q_i で $|\psi_i\rangle$ であるとする（ここで $\sum_i q_i = 1$）．そのときの量子状態を記述する密度演算子 $\hat{\rho}$ は，

$$\hat{\rho} = \sum_i q_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \tag{1.71}$$

で与えられる．なお，$\{|\psi_i\rangle\}$ はお互いに直交している必要はない．また，混合する状態の数は，ヒルベルト空間の次元より大きくても小さくてもよい．特別な場合として，状態が純粋状態で，状態ベクトルが $|\psi\rangle$ のとき，対応する密度演算子は

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| \tag{1.72}$$

となる．このように，状態ベクトルではなく，ケットベクトルとブラベクトルのテンソル積の形をとる演算子で量子系の状態を記述する，という点が密度演算子の重要な考え方である．なお，密度演算子は，状態ベクトル全体にかかる位相因子に依存しない: $|\psi\rangle\langle\psi| = e^{\mathrm{i}\theta}|\psi\rangle\langle\psi|e^{-\mathrm{i}\theta}$.

密度演算子は，以下に述べるように量子系の状態を記述するのに有用である．量子状態が密度演算子 $\hat{\rho} = \sum_i q_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ で記述されているときに，物理量 $\hat{A} = \sum_k \alpha_k \hat{P}_k$ を誤差なく測定することを考える．このときに測定結果が α_k である確率を求めたい．まず，状態ベクトルが $|\psi_i\rangle$ であるという条件のもとでは，ボルンの確率規則より，$\langle\psi_i|\hat{P}_k|\psi_i\rangle$ の確率で α_k が得られる．状態ベクトルが $|\psi_i\rangle$ である確率が q_i だったことを思い出すと，結局，測定結果 α_k が得られる確率は

$$p(k) = \sum_i q_i \langle\psi_i|\hat{P}_k|\psi_i\rangle \tag{1.73}$$

となる．

この結果をさらに変形するために，**トレース**（対角和）という概念を導入する．トレースとは，正規直交基底 $\{|\phi_k\rangle\}$ を用いて，任意の演算子 $\hat{A}$ に対して

$$\mathrm{tr}[\hat{A}] := \sum_k \langle\phi_k|\hat{A}|\phi_k\rangle \tag{1.74}$$

と定義される量である．これは正規直交基底の選び方に依存せず，また任意の演算子 $\hat{A}, \hat{B}$ に対して $\mathrm{tr}[\hat{A}\hat{B}] = \mathrm{tr}[\hat{B}\hat{A}]$ を満たす（トレースの巡回性）*11)．この性質を使うと (1.73) は

$$p(k) = \sum_i \mathrm{tr}[\hat{P}_k q_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|] \tag{1.75}$$

と書け，この右辺は $\mathrm{tr}[\hat{P}_k\hat{\rho}]$ に等しい．したがって，

---

*10) 厳密には，純粋状態と混合状態の定義はもう少し複雑だが，本書では立ち入らない．詳しくは [3], [7] などを参照．

*11) これは，ヒルベルト空間が有限次元の場合は常に成り立つが，無限次元の場合は必ずしも成り立たない．たとえば，位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ はこの性質を満たさない．

$$p(k) = \mathrm{tr}[\hat{P}_k \hat{\rho}] \tag{1.76}$$

が得られる．これが混合状態の場合のボルンの確率規則である．とくに，$\hat{P}_k = |\phi_k\rangle\langle\phi_k|$ と書けるときは，(1.76) は

$$p(k) = \langle\phi_k|\hat{\rho}|\phi_k\rangle \tag{1.77}$$

となる．

混合状態 (1.71) と重ね合わせ状態 $|\psi\rangle := \sum_i c_i|\psi_i\rangle$ を比べてみよう．$q_i = |c_i|^2$ とする．また，簡単のために $\{|\psi_i\rangle\}$ を正規直交基底とする．重ね合わせ状態 $|\psi\rangle$ を密度演算子で書くと，

$$\hat{\rho}' := |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{ij} c_i c_j^* |\psi_i\rangle\langle\psi_j| = \hat{\rho} + \sum_{i \neq j} c_i c_j^* |\psi_i\rangle\langle\psi_j| \tag{1.78}$$

となる．これを混合状態 (1.71) と比較すると，基底 $\{|\psi_i\rangle\}$ についての非対角項 $c_i c_j^*|\psi_i\rangle\langle\psi_j|$ ($i \neq j$) が存在することが，重ね合わせ状態の特徴であることが分かる．このように，ある基底に対応する状態の混合と重ね合わせの違いは，密度演算子をその基底で行列表示したときの非対角成分に現れる．非対角項は，**干渉項**とも呼ばれる．干渉項のある状態は**コヒーレンス**があると言われる．

具体例: キュービット系

具体例として，キュービット系を考えよう．たとえば，状態が確率 1/4 で $|0\rangle$，確率 3/4 で $|1\rangle$ の混合状態のときの密度演算子は，

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{3}{4}|1\rangle\langle 1| \tag{1.79}$$

である．ここで $|+\rangle := (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$，$|-\rangle := (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ と定義すると，(1.79) は

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4}|+\rangle\langle +| + \frac{1}{4}|-\rangle\langle -| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| \tag{1.80}$$

とも書けることが分かる．すなわち，同じ密度演算子で記述される状態を，二通りの純粋状態の混合で書けることが分かる．これは古典確率論にはない，量子論特有の性質である．一般に，混合状態の純粋状態への分解は一意ではなく，無限にある．

0 と 1 の測定結果に関して混合状態 (1.79) と同じ確率分布をもつ，次のような重ね合わせ状態を考える:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle. \tag{1.81}$$

対応する密度演算子は，

$$\hat{\rho}' := |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{3}{4}|1\rangle\langle 1| + \frac{\sqrt{3}}{2}(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) \tag{1.82}$$

である．このように，混合状態 $\hat{\rho}$ と重ね合わせ状態 $\hat{\rho}'$ は，密度演算子の非対角成分のあるなしという違いがある．この違いは，$\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 基底に対応する演算子 $\hat{\sigma}_z$ だけを測定しても分からない．実際，$\hat{\sigma}_z$ を測定した時に $+1$ の測定結果を得る確率は，$\hat{\rho}$ と $\hat{\rho}'$ で共通である:

$$p_z(+1) := \langle 1|\hat{\rho}|1\rangle = \frac{3}{4}, \quad p_z'(+1) := \langle 1|\hat{\rho}'|1\rangle = \frac{3}{4}. \tag{1.83}$$

しかし，別の方向の演算子，たとえば $\hat{\sigma}_x$ を測定すれば，$\hat{\rho}$ と $\hat{\rho}'$ を見分けることができる．実際，$\hat{\sigma}_x$ を測定して結果 $+1$ を得る確率は，

$$p_x(+1) := \langle +|\hat{\rho}|+\rangle = \frac{3}{8}, \quad p'_x(+1) := \langle +|\hat{\rho}'|+\rangle = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \tag{1.84}$$

となり，$\hat{\rho}$ と $\hat{\rho}'$ で異なっている．このように，非対角成分の有無は，混合状態を対角化する基底とは異なった基底を測定することで分かる．

密度演算子の一般的性質を考えよう．まず定義より明らかに，密度演算子はエルミートである．したがって，ある正規直交基底 $\{\psi_i\rangle$ を用いて

$$\hat{\rho} = \sum_i q_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i| \tag{1.85}$$

とスペクトル分解できる．ここで，**正値演算子**という概念を導入しておこう．一般に，任意の状態ベクトル $|\psi\rangle$ に対して $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$ が非負であるとき，演算子 $\hat{A}$ は正値であるといい，$\hat{A} \geq 0$ と書く．なお，正値演算子はすべてエルミート演算子であり，その固有値はすべて非負である．密度演算子の場合は，任意の状態ベクトル $|\psi\rangle$ に対して $\langle\psi|\hat{\rho}|\psi\rangle = \sum_i q_i|\langle\psi_i|\psi\rangle|^2 \geq 0$ が成り立つ．したがって $\hat{\rho}$ は正値であり，(1.85) の q_i はすべて非負である．これは確率が非負であることに対応している．

また，密度演算子のトレースは 1 である．実際，$\hat{\rho}$ が密度演算子のとき，

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}[\hat{\rho}] &= \sum_k \langle\phi_k| \left(\sum_i q_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right) |\phi_k\rangle \\
&= \sum_i q_i\langle\psi_i| \left(\sum_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k|\right) |\psi_i\rangle \\
&= \sum_i q_i\langle\psi_i|\psi_i\rangle = \sum_i q_i = 1
\end{aligned} \tag{1.86}$$

が成立する．ここで，状態ベクトルの規格化 $\langle\psi_i|\psi_i\rangle = 1$ と，混合確率の和が 1 であること（$\sum_i q_i = 1$）が本質的である．

ブロッホ球表示

ここで，キュービット系の密度演算子を表示する上で便利なブロッホ球表示を導入しよう．キュービット系のエルミート演算子は一般に

$$\hat{\rho} = r\left(\hat{I} + \sum_{i=x,y,z} s_i\hat{\sigma}_i\right) \tag{1.87}$$

と展開できる．ここで r, s_x, s_y, s_z はいずれも実数である．$\hat{\rho}$ が密度演算子のとき，これらの実数には制限が付く．まず，$\mathrm{tr}[\hat{\rho}] = \mathrm{tr}[r\hat{I}] = 2r$ と，規格化条件 $\mathrm{tr}[\hat{\rho}] = 1$ から，

$$r = 1/2 \tag{1.88}$$

が分かる．また，$\vec{s} := (s_x, s_y, s_z)$ とすると，密度演算子の正値性 $\hat{\rho} \geq 0$ より，

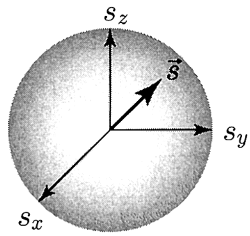


図 1.1　ブロッホ球の模式図.

$$\|\vec{s}\| \leq 1 \tag{1.89}$$

を証明することができる．以上により密度演算子は，(1.89) を満たすブロッホベクトル $\vec{s}$ を用いて，

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\left(\hat{I} + \sum_{i=x,y,z} s_i \hat{\sigma}_i\right) \tag{1.90}$$

と書けることが分かる．ブロッホベクトルの集合を**ブロッホ球**という．(1.89) より，これは半径 1 の球面およびその内部からなる．図 1.1 にブロッホ球の模式図を示す．とくに状態が純粋状態で，(1.23) の $+a$ の固有ベクトルのとき，対応する密度演算子は (1.25) より

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \frac{1+\cos\theta}{2}|1\rangle\langle 1| + \frac{e^{-\mathrm{i}\varphi}\sin\theta}{2}|1\rangle\langle 0| + \frac{e^{\mathrm{i}\varphi}\sin\theta}{2}|0\rangle\langle 1| + \frac{1-\cos\theta}{2}|0\rangle\langle 0| \\ &= \frac{1}{2}\left(\hat{I} + \hat{\sigma}_x \sin\theta\cos\varphi + \hat{\sigma}_y \sin\theta\sin\varphi + \hat{\sigma}_z\cos\theta\right)\end{aligned} \tag{1.91}$$

となる．すなわち，純粋状態のブロッホベクトルは $\|\vec{s}\| = 1$ で，その成分は

$$(s_x, s_y, s_z) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \tag{1.92}$$

と書ける．これは 1.1.1 節の最後で議論したブロッホベクトルと同じものである．以上より，ブロッホ球表示において，純粋状態はブロッホ球の表面に，混合状態はその内部に対応することが分かる．なお，ブロッホ球の中心は

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\hat{I} = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \tag{1.93}$$

であり，これは完全混合状態と呼ばれる．また，状態が (1.91) のときのパウリ演算子の期待値 $\langle\hat{\sigma}_i\rangle := \mathrm{tr}[\hat{\sigma}_i\hat{\rho}]$ を求めると，

$$\langle\hat{\sigma}_x\rangle = \sin\theta\cos\varphi = s_x,\ \langle\sigma_y\rangle = \sin\theta\sin\varphi = s_y,\ \langle\hat{\sigma}_z\rangle = \cos\theta = s_z \tag{1.94}$$

となる．したがって，(1.91) は

$$\hat{\rho} = \frac{(1+\langle\hat{\sigma}_z\rangle)|1\rangle\langle 1| + \langle\hat{\sigma}_x - \mathrm{i}\hat{\sigma}_y\rangle|1\rangle\langle 0| + \langle\hat{\sigma}_x + \mathrm{i}\hat{\sigma}_y\rangle|0\rangle\langle 1| + (1-\langle\hat{\sigma}_z\rangle)|0\rangle\langle 0|}{2} \tag{1.95}$$

とも書ける．

次に，密度演算子のユニタリ時間発展を考える．まず，ハミルトニアン $\hat{H}$ は時間依存

しないとする．状態ベクトルの時間発展は，シュレーディンガー表示のとき (1.27) に従うので，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)| &= \frac{d|\psi_i(t)\rangle}{dt}\langle\psi_i(t)| + |\psi_i(t)\rangle\frac{d\langle\psi_i(t)|}{dt} \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}|\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)| + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}|\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)|\hat{H} \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H}, |\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)|]\end{aligned} \tag{1.96}$$

が得られる．(1.96) より，$\hat{\rho}(t) = \sum_i q_i|\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)|$ がしたがう時間発展方程式は

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}(t)] \tag{1.97}$$

であることが分かる．これは**フォンノイマン方程式**（**von Neumann equation**）と呼ばれる．この方程式を形式的に解くと，

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t)\hat{\rho}(0)\hat{U}^\dagger(t) \tag{1.98}$$

となる．ここで $\hat{U}(t) := \exp(-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar)$ はユニタリ演算子である．

ハミルトニアンが時間依存する場合も同様で，フォンノイマン方程式は

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] \tag{1.99}$$

となる．その形式解は (1.98) の形で与えられ，その際の $\hat{U}(t)$ は時間順序積 (1.37) で与えられる．

なお，密度演算子のトレースは，ユニタリ時間発展で保存される．実際，トレースの巡回性を用いて

$$\mathrm{tr}[\hat{\rho}(t)] = \mathrm{tr}[\hat{U}(t)\hat{\rho}(0)\hat{U}^\dagger(t)] = \mathrm{tr}[\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t)\hat{\rho}(0)] = \mathrm{tr}[\hat{\rho}(0)] \tag{1.100}$$

となる．これは確率の総和が保存されることを意味している．また，密度演算子の正値性もユニタリ時間発展で保存される．すなわち，任意の $|\psi\rangle$ に対して $\langle\psi|\hat{\rho}|\psi\rangle \geq 0$ ならば，任意の $|\psi\rangle$ に対して $\langle\psi|\hat{U}\hat{\rho}\hat{U}^\dagger|\psi\rangle \geq 0$ である．

また，状態ベクトルのときと同様に，密度演算子の相互作用表示を導入できる．ハミルトニアンを $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\mathrm{int}}$ とする．このとき，$\hat{H}_0$ についての相互作用表示で，密度演算子 $\hat{\rho}^{\mathrm{I}}(t)$ と物理量 $\hat{A}^{\mathrm{I}}(t)$ はそれぞれ

$$\hat{\rho}^{\mathrm{I}}(t) := \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0 t\right)\hat{\rho}(t)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0 t\right) \tag{1.101}$$

$$\hat{A}^{\mathrm{I}}(t) := \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0 t\right)\hat{A}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0 t\right) \tag{1.102}$$

となる．ここで $\hat{\rho}(t)$ と $\hat{A}$ はそれぞれ，シュレーディンガー表示の密度演算子と物理量である．なお，ここでも相互作用表示の量に記号 $^{\mathrm{I}}$ を付けた．したがって，$\hat{\rho}^{\mathrm{I}}(t)$ は

$$\frac{d\hat{\rho}^{\mathrm{I}}(t)}{dt} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(t), \hat{\rho}^{\mathrm{I}}(t)] \tag{1.103}$$

という微分方程式に従う．

1.2.3　合成系と部分系の状態

次に，合成系の密度演算子を考える．二つの量子系 A と B があり，それぞれのヒルベルト空間が $\mathbf{H}_{\mathrm{A}}$ と $\mathbf{H}_{\mathrm{B}}$ とする．合成系 AB のヒルベルト空間はそれらのテンソル積 $\mathbf{H}_{\mathrm{A}} \otimes \mathbf{H}_{\mathrm{B}}$ である．合成系の密度演算子は，このテンソル積空間の演算子になる．たとえば，系 A の密度演算子が $\hat{\rho}_{\mathrm{A}}$ で，系 B の密度演算子が $\hat{\rho}_{\mathrm{B}}$ のとき，合成系の密度演算子は

$$\hat{\rho}_{\mathrm{AB}} = \hat{\rho}_{\mathrm{A}} \otimes \hat{\rho}_{\mathrm{B}} \tag{1.104}$$

で与えられる．これは積状態と呼ばれ，以下に述べるセパラブル状態の一例である．一般に，部分系の密度演算子 $\{\hat{\rho}_{\mathrm{A}}^{(i)}\}$ と $\{\hat{\rho}_{\mathrm{B}}^{(i)}\}$ があって，合成系の状態が

$$\hat{\rho}_{\mathrm{AB}} = \sum_i q_i \hat{\rho}_{\mathrm{A}}^{(i)} \otimes \hat{\rho}_{\mathrm{B}}^{(i)} \tag{1.105}$$

のように (1.104) の確率的混合で書けるとき，この状態はセパラブルであるという．そうでないとき，合成系の状態はエンタングルしているという．たとえば，エンタングルした純粋状態 (1.56) は，密度演算子で書くと

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{ij} c_i c_j^* |\psi_i\rangle\langle\psi_j| \otimes |\phi_i\rangle\langle\phi_j| \tag{1.106}$$

となるが，これは (1.105) のような形では書けない．

具体例として 2 キュービット系を考えよう．$|0\rangle|0\rangle$ と $|1\rangle|1\rangle$ を確率 1/2 ずつで混合すると，全系の状態は

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(|0\rangle|0\rangle\langle 0|\langle 0| + |1\rangle|1\rangle\langle 1|\langle 1|) \tag{1.107}$$

となる．この状態はセパラブルだが，左側のキュービットの状態が $|0\rangle$（$|1\rangle$）なら右側も $|0\rangle$（$|1\rangle$）という相関がある．これは古典的な確率混合の意味での相関なので，古典相関である．一方，エンタングルしたベル状態は，たとえば

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(|0\rangle|0\rangle\langle 0|\langle 0| + |1\rangle|1\rangle\langle 1|\langle 1| + |0\rangle|0\rangle\langle 1|\langle 1| + |1\rangle|1\rangle\langle 0|\langle 0|) \tag{1.108}$$

である．これは量子相関をもっている．古典相関と量子相関の違いは，密度演算子の非対角項 $|0\rangle|0\rangle\langle 1|\langle 1| + |1\rangle|1\rangle\langle 0|\langle 0|$ の有無に現れている．この非対角項は，二つの系にまたがった**非局所的な干渉項**である．

次に，合成系の状態から部分系の状態を計算する方法を考える．そのために，**部分トレース**（**partial trace**）という概念を導入する．$\mathbf{H}_{\mathrm{A}}$ の正規直交基底を $\{|\psi_i\rangle\}$，$\mathbf{H}_{\mathrm{B}}$ の正規直交基底を $\{|\phi_j\rangle\}$ とする．合成系の演算子 $\hat{C} := \sum_{ijmn} \gamma_{ijmn} |\psi_i\rangle\langle\psi_j| \otimes |\phi_m\rangle\langle\phi_n|$ を考える（γ_{ijmn} は任意の複素数）．これに対して，$\mathbf{H}_{\mathrm{A}}$ だけに作用する演算子を

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{B}}[\hat{C}] := \sum_k \langle\phi_k|\hat{C}|\phi_k\rangle = \sum_{ijk} \gamma_{ijkk} |\psi_i\rangle\langle\psi_j| \tag{1.109}$$

と定義する．これは，$\hat{C}$ に対して，B についての部分トレースをとった演算子である．A についての部分トレースも同様である．なお，

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{AB}}[\hat{C}] = \mathrm{tr}_{\mathrm{A}}[\mathrm{tr}_{\mathrm{B}}[\hat{C}]] = \mathrm{tr}_{\mathrm{B}}[\mathrm{tr}_{\mathrm{A}}[\hat{C}]] \tag{1.110}$$

が成立する．

さて，合成系の密度演算子を $\hat{\rho}_{\mathrm{AB}}$ とする．このとき，系 A の状態だけを記述する密度演算子は，B についての部分トレースをとった演算子

$$\hat{\rho}_{\mathrm{A}} := \mathrm{tr}_{\mathrm{B}}[\hat{\rho}_{\mathrm{AB}}] \tag{1.111}$$

で与えられる．このことの物理的な正当性は，次のようにして分かる．$\hat{A}$ を系 A の任意の物理量とする．これを合成系に拡張して書くと $\hat{A} \otimes \hat{I}_{\mathrm{B}}$ となる（$\hat{I}_{\mathrm{B}}$ は $\mathbf{H}_{\mathrm{B}}$ の単位演算子）．このとき，

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{A}}[\hat{A}\hat{\rho}_{\mathrm{A}}] = \mathrm{tr}_{\mathrm{AB}}[\hat{A} \otimes \hat{I}_{\mathrm{B}}\hat{\rho}_{\mathrm{AB}}] \tag{1.112}$$

が成立することが (1.110) から分かる．すなわち，系 A の物理量の期待値は，すべて $\hat{\rho}_{\mathrm{A}}$ から計算できることが分かる．

たとえば，もし合成系の状態がセパラブルな純粋状態 $|\psi_{\mathrm{A}}\rangle|\psi_{\mathrm{B}}\rangle$ ならば，部分系の状態も

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{B}}[|\psi_{\mathrm{A}}\rangle|\psi_{\mathrm{B}}\rangle\langle\psi_{\mathrm{A}}|\langle\psi_{\mathrm{B}}|] = |\psi_{\mathrm{A}}\rangle\langle\psi_{\mathrm{A}}| \tag{1.113}$$

という純粋状態になる．また，全系の状態が (1.105) で与えられるとき，系 A の密度演算子は

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{B}}[\hat{\rho}_{\mathrm{AB}}] = \sum_i q_i \hat{\rho}_{\mathrm{A}}^{(i)} \tag{1.114}$$

となる．また，(1.106) の場合は

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{B}}[|\psi\rangle\langle\psi|] = \sum_i |c_i|^2 |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \tag{1.115}$$

となる．このように，合成系の状態が純粋状態でも，部分系の状態は混合状態になりうる．これは古典論の場合にはない量子論特有の性質で，合成系の状態がエンタングルしている場合にこのようなことが起きる．その理由は，部分系だけを観測しても，系全体にわたる非局所的な干渉の効果は分からないからである．この性質のために，1.3 節以降で詳しく述べる干渉項の消失あるいはデコヒーレンスが起きる．

具体例として，2 キュービット系のベル状態 (1.58) を考える．左側のキュービットの状態は，4 個のベル状態のいずれの場合も

$$\frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \tag{1.116}$$

という完全混合状態になる．

1.3 非ユニタリ過程とクラウス演算子

これまでに，孤立量子系のダイナミクスはシュレーディンガー方程式またはフォンノイマン方程式で記述されることを見た．そこで次に，対象系（以下，システムと呼ぶ）が孤立しておらず，別の量子系（環境）と相互作用する状況を考える．全系の時間発展はユニタリであるが，部分系であるシステムの時間発展だけを見ると，それは非ユニタリになる．この非ユニタリ過程を記述する方法を考える．

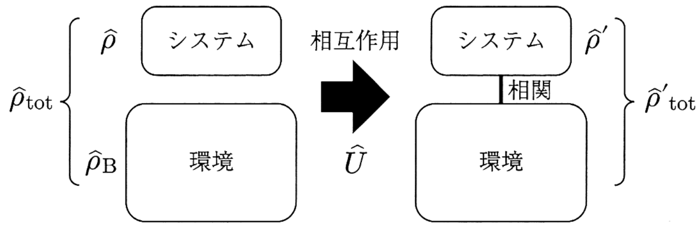


図 1.2　システムと環境の相互作用の模式図．初期状態においてシステムと環境の密度演算子はそれぞれ $\hat{\rho}$ と $\hat{\rho}_{\rm B}$ で与えられる．その後，両者はユニタリ演算子 $\hat{U}$ で相互作用しながら時間発展した結果，全系の密度演算子は $\hat{\rho}'_{\rm tot}$ となる．相互作用の結果，システムと環境の間には相関が形成される．最後に $\hat{\rho}'_{\rm tot}$ を環境についてトレースをとることで，システムの密度演算子 $\hat{\rho}'$ が得られる．

システムと環境の時間発展は以下のようである（図 1.2 も参照）．まず，初期状態ではシステムと環境には相関がなく，積状態にあるとする:

$$\hat{\rho}_{\rm tot} = \hat{\rho} \otimes \hat{\rho}_{\rm B}. \tag{1.117}$$

ここで $\hat{\rho}_{\rm tot}$，$\hat{\rho}$，$\hat{\rho}_{\rm B}$ は，それぞれ全系，システム，環境の初期状態を表す密度演算子である．全系がユニタリ演算子 $\hat{U}$ で時間発展すると，終状態は

$$\hat{\rho}'_{\rm tot} := \hat{U}\hat{\rho}_{\rm tot}\hat{U}^\dagger \tag{1.118}$$

となる．このとき，システムの終状態は

$$\hat{\rho}' := {\rm tr}_{\rm B}[\hat{\rho}'_{\rm tot}] \tag{1.119}$$

となる．ここで ${\rm tr}_{\rm B}$ は環境に関する部分トレースを表す．

本節の目的は，$\hat{\rho}'$ と $\hat{\rho}$ を結ぶ公式を導くことである．環境の初期状態を $\hat{\rho}_{\rm B} = \sum_l q_l|\Phi_l\rangle\langle\Phi_l|$ と対角化する．また，$\{|\Psi_m\rangle\}$ を環境の任意の基底とする．このとき

$$\begin{aligned} \hat{\rho}' &= \sum_m \langle\Psi_m|\hat{\rho}'_{\rm tot}|\Psi_m\rangle \\ &= \sum_{lm} q_l\langle\Psi_m|\hat{U}\left(\hat{\rho}\otimes|\Phi_l\rangle\langle\Phi_l|\right)\hat{U}^\dagger|\Psi_m\rangle \\ &= \sum_{lm} q_l\langle\Psi_m|\hat{U}|\Phi_l\rangle\hat{\rho}\langle\Phi_l|\hat{U}^\dagger|\Psi_m\rangle \end{aligned} \tag{1.120}$$

となる．ここで $\langle\Psi_m|\hat{U}|\Phi_l\rangle$ は，システムだけに作用する演算子である．そこで

$$\hat{M}_{lm} := \sqrt{q_l}\langle\Psi_m|\hat{U}|\Phi_l\rangle \tag{1.121}$$

とおいて，さらに簡単のために添え字をまとめて $k := (l, m)$ とおくと，(1.120) は

$$\hat{\rho}' = \sum_k \hat{M}_k\hat{\rho}\hat{M}_k^\dagger \tag{1.122}$$

と書ける．これが本節の主要な結果で，(1.122) は**クラウス表現**（**Kraus representation**）

と呼ばれる．また，$\hat{M}_k$ は**クラウス演算子**（**Kraus operator**）と呼ばれる．

クラウス演算子は，次の完全性条件を満たす:

$$\sum_k \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k = \hat{I}_\mathrm{S}. \tag{1.123}$$

ここで $\hat{I}_\mathrm{S}$ はシステムの単位演算子である．(1.123) は

$$\begin{aligned}\sum_k \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k &= \sum_{lm} \sqrt{q_l}\langle\Phi_l|\hat{U}^\dagger|\Psi_m\rangle\sqrt{q_l}\langle\Psi_m|\hat{U}|\Phi_l\rangle \\ &= \sum_l q_l\langle\Phi_l|\hat{U}^\dagger\hat{U}|\Phi_l\rangle = \sum_l q_l\langle\Phi_l|\hat{I}_\mathrm{SB}|\Phi_l\rangle \\ &= \sum_l q_l\hat{I}_\mathrm{S} = \hat{I}_\mathrm{S}\end{aligned} \tag{1.124}$$

から分かる．ここで $\hat{I}_\mathrm{SB}$ は全系の単位演算子である．

(1.123) から，非ユニタリ過程 (1.122) は**トレース保存**（**trace preserving**）であることが分かる．実際，

$$\mathrm{tr}[\hat{\rho}'] = \mathrm{tr}\left[\sum_k \hat{M}_k\hat{\rho}\hat{M}_k^\dagger\right] = \mathrm{tr}\left[\sum_k \hat{M}_k^\dagger\hat{M}_k\hat{\rho}\right] = \mathrm{tr}[\hat{\rho}] \tag{1.125}$$

である．これは，確率の総和が保存することを意味している．

また，(1.122) は密度演算子の正値性も保つ．これは，$\hat{\rho}'_\mathrm{tot}$ が正値演算子なので，その部分トレースをとった演算子 $\hat{\rho}'$ もやはり正値であることから分かる．このように，時間発展が演算子の正値性を保つとき，その時間発展を記述する写像（密度演算子から密度演算子への写像）は，**正値写像**（**positive map**）であるという．

さらに，(1.122) で記述される時間発展は，正値よりも強い**完全正値写像**（**completely positive map**）であることが知られている．これは以下のようにして特徴づけられる．システムのヒルベルト空間を $\mathbf{H}$ として，別の任意の系のヒルベルト空間を $\mathbf{H}_\mathrm{R}$ とする（$\hat{I}_\mathrm{R}$ を $\mathbf{H}_\mathrm{R}$ の単位演算子とする）*12)．合成系 $\mathbf{H}\otimes\mathbf{H}_\mathrm{R}$ の任意の密度演算子 $\hat{\rho}_\mathrm{ex}$ に対して，

$$\hat{\rho}'_\mathrm{ex} := \sum_k \hat{M}_k\otimes\hat{I}_\mathrm{R}\hat{\rho}_\mathrm{ex}\hat{M}_k^\dagger\otimes\hat{I}_\mathrm{R} \tag{1.126}$$

もまた正値である．これを，$\{\hat{M}_k\}$ で特徴づけられる時間発展 (1.122) は完全正値であるという．すなわち完全正値性とは，任意の系の部分系だけを (1.122) で時間発展させたとき，全系の正値性が保たれるという性質である*13)．

一般に，トレースを保存し完全正値であるような演算子から演算子への写像を，**CPTP 写像**（**completely positive and trace preserving map**）という．非ユニタリ発展を表す写像 (1.122) は CPTP 写像である．逆に，任意の CPTP 写像は，適当なクラウス演算子を用いて (1.122) の形で書けることが知られている*14)．

---

*12) $\mathbf{H}$ が無限次元の場合でも，$\mathbf{H}_\mathrm{R}$ は有限次元としてよい．

*13) 一般に演算子から演算子への写像を考えたとき，正値だが完全正値でない写像が存在する．たとえば，密度演算子を行列表示した時の転置がそのような写像の例であることが知られている．

*14) 証明は [14] などを参照．

ところで，環境の基底 $\{|\Psi_m\rangle\}$ は任意であった．これを別の基底 $\{|\Psi'_m\rangle\}$ に取り換えてもこれまでと同様の議論がでる．その際，基底を取り換えたことに対応して，クラウス演算子が $\hat{M}'_k := \sqrt{q_l}\langle\Psi'_m|\hat{U}|\Phi_l\rangle$ $(k := (l,m))$ になる．この $\hat{M}'_k$ に対しても，$\hat{\rho}' = \sum_k \hat{M}'_k\hat{\rho}\hat{M}'_k$ が成立する．すなわち，与えられた非ユニタリ発展を表すクラウス演算子は一意には決まらず，トレースをとる際の環境の基底の任意性に対応して，無限に存在する．

ここで，システムも環境もキュービット系の場合について，簡単な具体例を二つ挙げておく．

干渉項の消失

環境の初期状態を $|0\rangle$ とする．相互作用 $\hat{U}$ として，システムを制御キュービット，環境を標的キュービットとした CNOT ゲートを考える．このとき全系の時間発展は次のようになる:

$$\hat{U}|0\rangle|0\rangle = |0\rangle|0\rangle,\ \hat{U}|1\rangle|0\rangle = |1\rangle|1\rangle. \tag{1.127}$$

したがって $|\psi\rangle := c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ に対しては

$$\hat{U}|\psi\rangle|0\rangle = c_0|0\rangle|0\rangle + c_1|1\rangle|1\rangle \tag{1.128}$$

となる．環境の基底 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ に対応するクラウス演算子を定義しよう．ここで (1.128) の両辺に，左から環境の $\langle 0|, \langle 1|$ をかけることで

$$(\langle 0|\hat{U}|0\rangle)|\psi\rangle = c_0|0\rangle,\ (\langle 1|\hat{U}|0\rangle)|\psi\rangle = c_1|1\rangle \tag{1.129}$$

が成立する．したがって，クラウス演算子は

$$\hat{M}_0 := \langle 0|\hat{U}|0\rangle = |0\rangle\langle 0|,\ \hat{M}_1 := \langle 1|\hat{U}|0\rangle = |1\rangle\langle 1| \tag{1.130}$$

であることが分かる．このとき，密度演算子

$$\hat{\rho} = c_{00}|0\rangle\langle 0| + c_{11}|1\rangle\langle 1| + c_{01}|0\rangle\langle 1| + c_{10}|1\rangle\langle 0| \tag{1.131}$$

の時間発展は，

$$\sum_{k=0,1} \hat{M}_k\hat{\rho}\hat{M}_k^\dagger = c_{00}|0\rangle\langle 0| + c_{11}|1\rangle\langle 1| \tag{1.132}$$

となる．すなわち，基底 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ に関する対角成分はそのままで，非対角成分（干渉項）が消失する．これは，CNOT がシステムと環境をエンタングルさせたことの結果である．もし初期状態が $|0\rangle$ と $|1\rangle$ の重ね合わせ状態なら，終状態は同じ確率での混合状態になる．このような，非ユニタリ過程による干渉項の消失は，コヒーレンスが失われることとも言えるのでデコヒーレンス（**decoherence**）と呼ばれる．

光子の自然放出

次に，イメージを具体的にするために，キュービットは二準位原子であるとしよう（図 1.3 を参照）．$|0\rangle$ が基底状態を，$|1\rangle$ が励起状態であるとする．励起状態にある原子を真空中に置いておくと，自発的に光子を放出して基底状態に戻る．これを**自然放出**（**spontaneous emission**）という．この場合，原子がシステムで，真空が環境である．

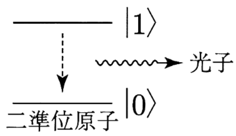


図 1.3　$|0\rangle$ を基底状態，$|1\rangle$ を励起状態とする二準位原子からの，光子の放出の模式図.

環境の $|0\rangle$ を真空，$|1\rangle$ を光子が一個存在する状態とする．環境の初期状態を $|0\rangle$ として，システムと環境の相互作用は次のようになる:

$$|0\rangle|0\rangle \ \rightarrow \ |0\rangle|0\rangle, \ \ |1\rangle|0\rangle \ \rightarrow \ |0\rangle|1\rangle. \tag{1.133}$$

これはシステムとプローブの状態を入れ替える SWAP ゲートと等価である．環境の基底 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ でクラウス演算子を定義すると，CNOT のときと同様の計算により

$$\hat{M}_0 = |0\rangle\langle 0|, \ \hat{M}_1 = |0\rangle\langle 1| \tag{1.134}$$

であることが分かる．このとき，システムの密度演算子 (1.131) の時間発展は,

$$\sum_{k=0,1} \hat{M}_k \hat{\rho} \hat{M}_k^\dagger = |0\rangle\langle 0| \tag{1.135}$$

となる．すなわち，初期状態にかかわらず必ず原子は光子を放出して，基底状態 $|0\rangle$ になるということを表している.

第 2 章
量子測定理論

本章では，量子測定について詳しく解説する．まず 2.1 節で，量子測定理論の一般的な枠組みについて概説する．2.2 節では，測定に伴う誤差と反作用をどう定式化するかについて述べる．2.3 節では，測定過程に伴う不確定性関係を中心に，いろいろな不確定性関係について議論する．2.4 節では量子測定の具体例について議論し，実際の実験で量子測定がどのように実現されるかを解説する．2.5 節では，量子状態を推定する方法である量子状態トモグラフィーについて述べる．

2.1 測定演算子と POVM

2.1.1 射影測定

まず，**射影測定**と呼ばれる理想的な測定に伴う状態変化を考えよう．量子状態が状態ベクトル $|\psi\rangle$ で記述されているときに，物理量 $\hat{A} = \sum_k \alpha_k \hat{P}_k$ を射影測定することを考える．ここで $\hat{P}_k$ は固有値 α_k に対応する射影演算子であり，$\hat{P}_k^2 = \hat{P}_k$ および $\sum_k \hat{P}_k = \hat{I}_\mathrm{S}$ を満たしている（$\hat{I}_\mathrm{S}$ はシステムの単位演算子）．射影測定の結果は固有値の一つ α_k になり，その確率はボルンの確率規則 (1.13) から $p(k) = \langle\psi|\hat{P}_k|\psi\rangle$ となる．測定結果 α_k を得た直後の状態 $|\psi'_k\rangle$ は

$$|\psi'_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{p(k)}}\hat{P}_k|\psi\rangle \tag{2.1}$$

で与えられる．すなわち，状態ベクトルは測定結果に対応する固有空間に射影される．これは経験的に確立された事実であり，しばしば**射影公理**と呼ばれる*1)．ここで $1/\sqrt{p(k)}$ は，状態ベクトルのノルムを 1 に保つための規格化因子である．実際，

$$\|\psi'_k\|^2 = \frac{1}{p(k)}\langle\psi|\hat{P}_k|\psi\rangle = 1 \tag{2.2}$$

となる．とくに，α_k の固有空間が一次元で（すなわち，縮退がなく）$\hat{P}_k = |\phi_k\rangle\langle\phi_k|$ と書けるときは，全体にかかる位相因子を除いて

$$|\psi'_k\rangle = |\phi_k\rangle \tag{2.3}$$

---

*1） あるいは射影仮設と呼ばれる．公理や仮設といっても，実験的に十分に確立された経験則である．

となる．すなわち，射影測定後の状態ベクトルは，測定結果に対応する固有状態となる．

次に，被測定系の状態が密度演算子 $\hat{\rho} := \sum_i q_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ で与えられる場合を考える．測定結果 α_k を得る確率は $p(k) := \mathrm{tr}[\hat{P}_k\hat{\rho}]$ である．$|\psi_i\rangle$ に射影公理を適用すると，$\hat{P}_k$ に対応する固有空間に射影される．したがって測定後の密度演算子 $\hat{\rho}'_k$ は，

$$\sum_i q_i\hat{P}_k|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\hat{P}_k \tag{2.4}$$

を規格化したもの，すなわち

$$\hat{\rho}'_k = \frac{\hat{P}_k\hat{\rho}\hat{P}_k}{p(k)} \tag{2.5}$$

で与えられることが分かる．これが密度演算子に対する射影測定に伴う状態変化である．ここで $1/p(k)$ は規格化因子である．実際，

$$\mathrm{tr}[\hat{\rho}'_k] = \frac{\mathrm{tr}[\hat{P}_k\hat{\rho}]}{p(k)} = \frac{p(k)}{p(k)} = 1 \tag{2.6}$$

である．左辺から中辺への変形で，トレースの巡回性と $\hat{P}_k^2 = \hat{P}_k$ を使った．

2.1.2 間接測定モデル: 簡単な場合

次に，必ずしも理想的ではない一般の量子測定を考える．この場合，測定後の状態はオブザーバブルの固有状態とは限らない．このような一般的な量子測定を体系的に扱うために，重要な役割を果たすのが**間接測定**の考え方である．ここで間接測定とは，被測定系（以下，システムと呼ぶ）と別のプローブ系を相互作用させ，プローブ系に対して射影測定することを意味する．このとき，相互作用によって生じたシステムとプローブの相関を通じて，システムの情報を読み出すことができる（図 2.1 を参照）．もしも両者の相関が完全ならば，以下に見るように，プローブに対する射影測定がシステムに対する射影測定にもなる．しかし一般には相関は不完全であり，それがシステムに対する測定誤差の原因となる．このような状況を考えることで，一般の測定を記述する理論を，本質的にはボルンの確率規則と射影公理だけから構成することができる．なお，実際の実験のほとんどが，間接測定を行っている．たとえば，システムが原子，プローブがレーザー光（電磁場）の場合，両者を相互作用させたあと，光の状態変化を検出することによって，間接的に原子の情報を読み出すのである．

まず準備として，システムに対する射影測定を，間接測定モデルで記述してみよう．システムの初期状態が状態ベクトル $|\psi\rangle$ で記述されているとして，基底 $\{|\psi_k\rangle\}$ の射影測定を行うことを考える．まず，この基底で初期状態を展開する:

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k|\psi_k\rangle. \tag{2.7}$$

また，$|\Phi\rangle$ をプローブの初期状態とする．全系の初期状態は $|\psi\rangle|\Phi\rangle$ である．次にシステムとプローブが相互作用する．これは，以下のような全系に作用するユニタリ演算子 $\hat{U}$ で記述される: $\{|\Psi_k\rangle\}$ をプローブの正規直交基底として，

$$\hat{U}|\psi_k\rangle|\Phi\rangle = |\psi_k\rangle|\Psi_k\rangle. \tag{2.8}$$

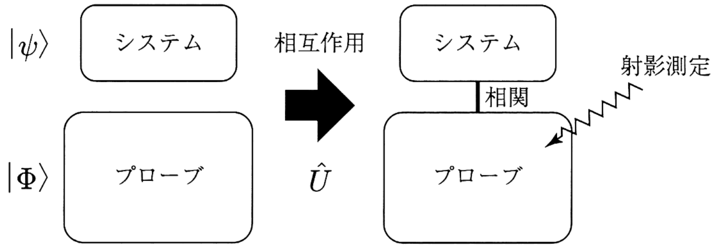


図 2.1　間接測定の模式図．ユニタリ相互作用 $\hat{U}$ によりシステムとプローブの間に相関が生じ，プローブの状態を射影測定することによってシステムの状態を知ることができる．

すなわち，ユニタリ演算子 $\hat{U}$ は系の状態とプローブの状態を一対一に対応させる．このとき，$\hat{U}$ の線形性により，全系は

$$\hat{U}|\psi\rangle|\Phi\rangle = \sum_k c_k|\psi_k\rangle|\Psi_k\rangle \tag{2.9}$$

と時間発展する．この時点でシステムとプローブはエンタングルして，量子相関をもっている．ここで，プローブの基底 $\{|\Psi_k\rangle\}$ を射影測定する．全系に対してボルンの確率規則を適用すると，測定結果 k が得られる確率 $p(k)$ は

$$\begin{aligned} p(k) &= \langle\psi|\langle\Phi|\hat{U}^\dagger\left(|\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|\right)\hat{U}|\psi\rangle|\Phi\rangle \\ &= \|\langle\Psi_k|\sum_{k'} c_{k'}|\psi_{k'}\rangle|\Psi_{k'}\rangle\|^2 \\ &= |c_k|^2 \end{aligned} \tag{2.10}$$

となる．これは，システムに対して射影測定を行った時のボルンの確率規則の結果と一致している．また，全系に射影公理を適用すると，測定後の状態は位相因子を除いて

$$\frac{1}{\sqrt{p(k)}}|\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|\hat{U}|\psi\rangle|\Phi\rangle = |\psi_k\rangle|\Psi_k\rangle \tag{2.11}$$

となる*2)．したがって，測定結果 k が得られた時のシステムの状態は $|\psi_k\rangle$ である．これはシステムに対して射影公理を適用した時に得られる状態と同じである．したがって，以上のような間接測定モデルで，システムに対する射影測定と実質的に同じことができることが分かる．その際に重要なのは，システムとプローブの相互作用が，(2.9) のように両者に完全な相関を作り出す点である．

次に，より一般的に，測定に誤差がある場合を考えよう．$|\psi\rangle$，$|\Phi\rangle$，$|\psi\rangle|\Phi\rangle$ を，それぞれシステム，プローブ，全系の初期状態とする．次に全系を適当なユニタリ演算子 $\hat{U}$ で時間発展させる．このユニタリ発展は，システムとプローブに完全な相関を作るとは限らない．次に，プローブに対して基底 $\{|\Psi_k\rangle\}$ で射影測定を行う．このとき，測定結果 k を

*2)　ここで，左から射影演算子 $\hat{I}_{\mathrm{S}} \otimes |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|$ をかけた（$\hat{I}_{\mathrm{S}}$ はシステムの単位演算子）．

得る確率 $p(k)$ は，全系のボルンの確率規則より

$$p(k) = \langle\psi|\langle\Phi|\hat{U}^\dagger\left(|\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|\right)\hat{U}|\psi\rangle|\Phi\rangle = \|\langle\Psi_k|\hat{U}|\psi\rangle|\Phi\rangle\|^2 \tag{2.12}$$

で与えらえる．また，測定後の全系の状態は，射影公理より

$$\frac{1}{\sqrt{p(k)}}|\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|\hat{U}|\psi\rangle|\Phi\rangle \tag{2.13}$$

となる．ここで，システムにのみ作用する演算子

$$\hat{M}_k := \langle\Psi_k|\hat{U}|\Phi\rangle \tag{2.14}$$

を導入しよう．これは**測定演算子**（**measurement operator**），または 1.3 節のときと同様にクラウス演算子と呼ばれる．(2.13) より，測定結果 k を得た後のシステムの状態は

$$\frac{1}{\sqrt{p(k)}}\hat{M}_k|\psi\rangle \tag{2.15}$$

と書けることが分かる．また，

$$\hat{E}_k := \hat{M}_k^\dagger\hat{M}_k \tag{2.16}$$

という演算子を定義すると，測定結果 k を得る確率は

$$p(k) = \langle\psi|\hat{M}_k^\dagger\hat{M}_k|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{E}_k|\psi\rangle \tag{2.17}$$

という簡単な公式で書ける．$\{\hat{E}_k\}$ は **POVM**（Positive Operator-Valued Measure）と呼ばれる[*3]．また，(2.16) より $\hat{E}_k$ は正値演算子である．これは，確率が非負であること ($p(k) \geq 0$) を保証している．

まとめると，クラウス演算子によって，測定結果を得る確率と，測定に伴うシステムの状態変化の両方を記述することができる．測定結果を得る確率だけなら，POVM だけから計算することができる．

なお，クラウス演算子は，1.3 節のときと同様に完全性条件

$$\begin{aligned}\sum_k \hat{M}_k^\dagger\hat{M}_k &= \sum_k\langle\Phi|\hat{U}^\dagger|\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|\hat{U}|\Phi\rangle \\ &= \langle\Phi|\hat{U}^\dagger\hat{U}|\Phi\rangle = \langle\Phi|\hat{I}_{\mathrm{SP}}|\Phi\rangle = \hat{I}_{\mathrm{S}}\end{aligned} \tag{2.18}$$

を満たす．ここで，$\hat{I}_{\mathrm{S}}$ と $\hat{I}_{\mathrm{SP}}$ は，それぞれシステムと全系の単位演算子である．(2.18) を POVM で書くと

$$\sum_k \hat{E}_k = \hat{I}_{\mathrm{S}} \tag{2.19}$$

となる．したがって，

$$\sum_k p(k) = \sum_k \mathrm{tr}[\hat{E}_k\hat{\rho}] = 1 \tag{2.20}$$

*3) 正確には，k の集合上に定義されたシグマ代数から正値演算子への写像のうち，(2.19) を満たすものが POVM である．すなわち，通常の測度（measure）はシグマ代数から非負の実数への写像であるのに対して，POVM は正値演算子への写像なので，“operator-valued measure”（演算子に値をとる測度）と呼ばれる．

を得る．すなわち，(2.19) は測定結果を得る確率の総和が 1 であることを保証している．

ここで，「誤差のない測定」と「射影測定」の違いについて述べておく．システムの物理量 $\hat{A} = \sum_k \alpha_k \hat{P}_k$ を測定するために，間接測定を行ったとする．**誤差のない測定**とは，任意の k について $\hat{E}_k = \hat{P}_k$ が成立する測定を意味する．一方，ある測定が射影測定であるとは，測定後の状態が測定結果に対応する固有空間に射影されていることである．このための必要十分条件は，任意の k について $\hat{M}_k = \hat{P}_k$ が成立することである．すなわち，誤差がない測定は測定結果の確率を与える POVM についての条件だが，射影測定は確率だけでなく測定直後の状態も与えるクラウス演算子についての条件である．射影測定ならば誤差がない測定なので，射影測定の方が強い条件である．

以下では具体例として，システムもプローブもともにキュービットの場合について，いくつかの典型的な間接測定を考える．

射影測定

プローブの初期状態を $|0\rangle$ として，相互作用として CNOT を考える:

$$|0\rangle|0\rangle \ \rightarrow\ |0\rangle|0\rangle,\ \ |1\rangle|0\rangle \ \rightarrow\ |1\rangle|1\rangle. \tag{2.21}$$

これは，1.3 節の具体例「干渉項の消失」で考えた状況と同じである．システムの初期状態が $c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ のとき，全系は次のように時間発展する:

$$(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle)|0\rangle \ \rightarrow c_0|0\rangle|0\rangle + c_1|1\rangle|1\rangle \tag{2.22}$$

この相互作用の後，プローブの状態を基底 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ に関して射影測定する．このとき，クラウス演算子と POVM はいずれも射影演算子で与えられる:

$$\hat{M}_0 = |0\rangle\langle 0|,\ \hat{M}_1 = |1\rangle\langle 1|,\ \hat{E}_0 = |0\rangle\langle 0|,\ \hat{E}_1 = |1\rangle\langle 1|. \tag{2.23}$$

すなわち，この間接測定モデルは，システムに対する射影測定を実現する．

吸収型測定

プローブの初期状態を $|0\rangle$ として，相互作用として SWAP ゲートを考える:

$$|0\rangle|0\rangle \ \rightarrow\ |0\rangle|0\rangle,\ \ |1\rangle|0\rangle \ \rightarrow\ |0\rangle|1\rangle. \tag{2.24}$$

これは 1.3 節の具体例「光子の放出」で考えたものと同じである．システムの初期状態が $c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ のとき，全系は次のように時間発展する:

$$(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle)|0\rangle \ \rightarrow\ |0\rangle(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle) \tag{2.25}$$

この相互作用の後，プローブの基底 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ を射影測定する．このとき，クラウス演算子と POVM は

$$\hat{M}_0 = |0\rangle\langle 0|,\ \hat{M}_1 = |0\rangle\langle 1|,\ \hat{E}_0 = |0\rangle\langle 0|,\ \hat{E}_1 = |1\rangle\langle 1| \tag{2.26}$$

で与えられる．このように，POVM は射影演算子だが，クラウス演算子のうち $\hat{M}_1$ はそうではない．これは，誤差がない測定だが射影測定ではない場合に対応している．なお，測定後のシステムの状態は，測定結果にかかわらず $|0\rangle$ になる．物理的には，たとえばシ

ステムが単一モードの電磁場で，$|0\rangle$ が真空，$|1\rangle$ が光子が 1 個存在する状態のときに，吸収型測定器で光子数を測定する状況に対応している．この場合，光子を検出してもしなくても，測定後の状態は真空である（光子を検出した場合は，その光子は測定器に吸収されてしまうからである）．

誤差のある測定

プローブの初期状態を $|0\rangle$ として，相互作用として次のものを考える:

$$\begin{aligned} |0\rangle|0\rangle &\to |0\rangle(\sqrt{1-\varepsilon}|0\rangle + \sqrt{\varepsilon}|1\rangle), \\ |1\rangle|0\rangle &\to |1\rangle(\sqrt{\varepsilon}|0\rangle + \sqrt{1-\varepsilon}|1\rangle). \end{aligned} \tag{2.27}$$

システムの初期状態が $c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ のとき，全系は次のように時間発展する:

$$(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle)|0\rangle \to (c_0\sqrt{1-\varepsilon}|0\rangle + c_1\sqrt{\varepsilon}|1\rangle)|0\rangle + (c_0\sqrt{\varepsilon}|0\rangle + c_1\sqrt{1-\varepsilon}|1\rangle)|1\rangle. \tag{2.28}$$

この相互作用の後，プローブの基底 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ を射影測定する．このとき，クラウス演算子と POVM は

$$\hat{M}_0 = \sqrt{1-\varepsilon}|0\rangle\langle 0| + \sqrt{\varepsilon}|1\rangle\langle 1|,\ \hat{M}_1 = \sqrt{\varepsilon}|0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-\varepsilon}|1\rangle\langle 1| \tag{2.29}$$

$$\hat{E}_0 = (1-\varepsilon)|0\rangle\langle 0| + \varepsilon|1\rangle\langle 1|,\ \hat{E}_1 = \varepsilon|0\rangle\langle 0| + (1-\varepsilon)|1\rangle\langle 1| \tag{2.30}$$

となる．ここで，ε は，被測定状態が $|0\rangle$ $(|1\rangle)$ のとき，測定結果が 1 (0) になる誤差確率を与えている．$\varepsilon = 0$ のとき，この測定は誤差のない射影測定になる．

さて，一般に，システムの初期状態が密度演算子 $\hat{\rho}$ で与えられている場合を考えよう．プローブの初期状態は状態ベクトル $|\Psi\rangle$ で記述されるとする．したがって全系の初期状態は $\hat{\rho} \otimes |\Psi\rangle\langle\Psi|$ である．これまでの設定と同様に．全系がユニタリ発展をしたあと，プローブに対して射影測定を行う．この測定モデルを考えるには，密度演算子が $\hat{\rho} = \sum_i q_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ と書けるとして，それぞれの $|\phi_i\rangle$ にこれまでの議論を適用してから，結果を確率 q_i で混合すればよい．まず，測定結果 k が得られる確率は

$$p(k) = \sum_i q_i\langle\phi_i|\hat{E}_k|\phi_i\rangle = \mathrm{tr}[\hat{E}_k\hat{\rho}] \tag{2.31}$$

となる．結果 k を得たときの測定後の状態 $\hat{\rho}'_k$ は，$\sum_i q_i\hat{M}_k|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\hat{M}_k^\dagger$ を規格化すればいいので，

$$\hat{\rho}'_k = \frac{1}{p(k)}\hat{M}_k\hat{\rho}\hat{M}_k^\dagger \tag{2.32}$$

で与えられる．

ここで，測定後の状態を，すべての測定結果についてのアンサンブル平均した状態を考えよう．その密度演算子を $\hat{\rho}'$ とすると，(2.32) より

$$\hat{\rho}' := \sum_k p(k)\hat{\rho}'_k = \sum_k \hat{M}_k\hat{\rho}\hat{M}_k^\dagger \tag{2.33}$$

となることが分かる．この状態は，1.3 節で議論したような，システムとプローブが相互作用した後，プローブに対して射影測定を行わずに単に部分トレースをとった状態に等し

い．プローブに対する射影測定は，測定結果を読み出さなければシステムの状態を変えないので，これは当然の結果である．

また，1.3 節で議論したクラウス演算子の非一意性を，量子測定の観点から理解することもできる．プローブに対して射影測定する基底を $\{|\Psi'_k\rangle\}$ として，それに対応して

$$\hat{M}'_k := \langle\Psi'_k|\hat{U}|\Phi\rangle \tag{2.34}$$

というクラウス演算子を考える．これと (2.14) の $\hat{M}_k$ は，アンサンブル平均 (2.33) のレベルでは同じ時間発展に対応する．すなわち，1.3 節で議論したクラウス演算子の非一意性は，プローブをどの基底で射影測定するかの任意性に対応していると言える．

2.1.3 間接測定モデル: 一般の場合

次に，2.1.2 節の議論をさらに拡張して，最も一般的な間接測定モデルを考える．2.4 節で議論する電磁場のホモダイン測定やヘテロダイン測定など，いくつかの実験的に重要な測定を解析するために，この一般的な設定が必要になる．システムの初期状態を $\hat{\rho}$，プローブの初期状態を $\hat{\rho}_\mathrm{P}$ として，全系の状態を $\hat{\rho}\otimes\hat{\rho}_\mathrm{P}$ とする．そして，システムとプローブが相互作用する．この時間発展は全系のユニタリ演算子 $\hat{U}$ で記述され，相互作用後の状態を

$$\hat{U}\hat{\rho}\otimes\hat{\rho}_\mathrm{P}\hat{U}^\dagger \tag{2.35}$$

とする．次に，全系の物理量 $\hat{R}$ を射影測定する．2.1.2 節ではプローブだけに対する射影測定を考えていたが，以下ではこれを一般化して，プローブとシステムの合成系に対する射影測定を考える．このような状況は，2.4.2 節で議論する光の直交位相振幅のホモダイン測定など，実際の実験状況でも多くみられる．さて，射影測定する物理量 $\hat{R}$ を

$$\hat{R} = \sum_k r_k \hat{P}_k^R \tag{2.36}$$

とスペクトル分解する．ここで r_k は固有値（$k\neq l$ ならば $r_k\neq r_l$ とする），$\hat{P}_k^R$ は r_k に対応する固有空間への射影演算子である．また，$\hat{\rho}_\mathrm{P}$ を $\hat{\rho}_\mathrm{P}=\sum_l q_l|\Phi_l\rangle\langle\Phi_l|$ とスペクトル分解する．さらに，$\{|\Psi_m\rangle\}$ をプローブの任意の基底とする．

以上の設定のもとで，測定結果 k が得られる確率は，全系に対してボルンの確率規則を適用して

$$p(k) = \mathrm{tr}_\mathrm{SP}[\hat{P}_k^R\hat{U}\hat{\rho}\otimes\hat{\rho}_\mathrm{P}\hat{U}^\dagger] \tag{2.37}$$

となる．また，結果 k が出たときの測定後の全系の状態は，射影公理を適用して

$$\frac{1}{p(k)}\hat{P}_k^R\hat{U}\hat{\rho}\otimes\hat{\rho}_\mathrm{P}\hat{U}^\dagger\hat{P}_k^R \tag{2.38}$$

となる．したがって，測定後のシステムの状態は

$$\hat{\rho}'_k = \frac{1}{p(k)}\mathrm{tr}_\mathrm{P}[\hat{P}_k^R\hat{U}\hat{\rho}\otimes\hat{\rho}_\mathrm{P}\hat{U}^\dagger\hat{P}_k^R] \tag{2.39}$$

となる．

次に (2.37) と (2.39) をさらに分かりやすい形に変形しよう．まず，測定後の状態 (2.39)

については，

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho}'_k &= \frac{1}{p(k)} \sum_{lm} q_l \langle \Psi_m | \hat{P}^R_k \hat{U} \hat{\rho} \otimes |\Phi_l\rangle\langle\Phi_l| \hat{U}^\dagger \hat{P}^R_k |\Psi_m\rangle \\
&= \frac{1}{p(k)} \sum_{lm} q_l \langle \Psi_m | \hat{P}^R_k \hat{U} |\Phi_l\rangle \hat{\rho} \langle\Phi_l| \hat{U}^\dagger \hat{P}^R_k |\Psi_m\rangle
\end{aligned} \tag{2.40}
$$

となる．ここで，システムに作用するクラウス演算子を

$$
\hat{M}_{ki} := \sqrt{q_l} \langle \Psi_m | \hat{P}^R_k \hat{U} |\Phi_l\rangle \tag{2.41}
$$

と定義する．ここで $i := (l, m)$ とおいた．このとき，測定後の状態 (2.39) は

$$
\hat{\rho}'_k = \frac{1}{p(k)} \sum_i \hat{M}_{ki} \hat{\rho} \hat{M}^\dagger_{ki} \tag{2.42}
$$

と書ける．これは量子測定のクラウス表現に他ならない．測定結果 k 以外に，添え字 i があるところが 1.3 節の結果 (1.122) とは異なっている．これは，システムから原理的には読み出せる情報を $\hat{R}$ の射影測定ではすべて読み出すことができない，という状況を表していて，(2.42) は読み出しきれなかった情報に関してアンサンブル平均をとっていると解釈することができる．なお，測定後の状態のすべての測定結果に関するアンサンブル平均は，

$$
\hat{\rho}' := \sum_k p(k) \hat{\rho}'_k = \sum_{ki} \hat{M}_{ki} \hat{\rho} \hat{M}^\dagger_{ki} \tag{2.43}
$$

となる．

次に，測定結果 k を得る確率 (2.37) は，

$$
\begin{aligned}
p(k) &= \mathrm{tr}_{\mathrm{SP}}[\hat{P}^R_k \hat{U} \hat{\rho} \otimes \hat{\rho}_{\mathrm{P}} \hat{U}^\dagger \hat{P}^R_k] = \mathrm{tr}_{\mathrm{S}}[\mathrm{tr}_{\mathrm{P}}[\hat{P}^R_k \hat{U} \hat{\rho} \otimes \hat{\rho}_{\mathrm{P}} \hat{U}^\dagger \hat{P}^R_k]] \\
&= \mathrm{tr}_{\mathrm{S}}\left[\sum_i \hat{M}_{ki} \hat{\rho} \hat{M}^\dagger_{ki}\right] = \mathrm{tr}_{\mathrm{S}}\left[\sum_i \hat{M}^\dagger_{ki} \hat{M}_{ki} \hat{\rho}\right]
\end{aligned} \tag{2.44}
$$

となる．ここで POVM $\{\hat{E}_k\}$ を

$$
\hat{E}_k := \sum_i \hat{M}^\dagger_{ki} \hat{M}_{ki} \tag{2.45}
$$

と定義すると，

$$
p(k) = \mathrm{tr}_{\mathrm{S}}[\hat{E}_k \hat{\rho}] \tag{2.46}
$$

となる．なお，$\hat{E}_k$ は

$$
\begin{aligned}
\hat{E}_k &= \sum_{lm} \sqrt{q_l} \langle\Phi_l| \hat{U}^\dagger \hat{P}^R_k |\Psi_m\rangle \sqrt{q_l} \langle \Psi_m | \hat{P}^R_k \hat{U} |\Phi_l\rangle \\
&= \sum_l q_l \langle\Phi_l| \hat{U}^\dagger \hat{P}^R_k \hat{U} |\Phi_l\rangle = \mathrm{tr}_{\mathrm{P}}[\hat{U}^\dagger \hat{P}^R_k \hat{U} \hat{\rho}_{\mathrm{P}}]
\end{aligned} \tag{2.47}
$$

とも書ける．

(2.42) と (2.46) はそれぞれ，量子測定による状態変化と，測定結果を得る確率を記述する，最も一般的な公式である．これらはそれぞれ，2.1.2 節の (2.15) と (2.17) を一般化したものになっている．ここでも 2.1.2 節と同様に，クラウス演算子と POVM が重要な役

割を果たしていることが分かる．

また，(2.41) より，

$$\begin{aligned}\sum_{ki}\hat{M}_{ki}^{\dagger}\hat{M}_{ki} &= \sum_{klm}\sqrt{q_l}\langle\Phi_l|\hat{U}^{\dagger}\hat{P}_k^R|\Psi_m\rangle\sqrt{q_l}\langle\Psi_m|\hat{P}_k^R\hat{U}|\Phi_l\rangle \\ &= \sum_{kl}q_l\langle\Phi_l|\hat{U}^{\dagger}\hat{P}_k^R\hat{U}|\Phi_l\rangle = \sum_{l}q_l\langle\Phi_l|\hat{I}_{\mathrm{SP}}|\Phi_l\rangle \\ &= \sum_{l}q_l\hat{I}_{\mathrm{S}} = \hat{I}_{\mathrm{S}}\end{aligned} \tag{2.48}$$

となり（$\hat{I}_{\mathrm{SP}}$ と $\hat{I}_S$ はそれぞれ全系とシステムの単位演算子），2.1.2 節で得た結果と同様の完全性条件

$$\sum_{ki}\hat{M}_{ki}^{\dagger}\hat{M}_{ki} = \hat{I}_{\mathrm{S}} \tag{2.49}$$

が得られる．これを POVM で書くと，

$$\sum_{k}\hat{E}_k = \hat{I}_{\mathrm{S}} \tag{2.50}$$

となる．これは $\sum_k p(k) = 1$ を保証している．また，$\hat{E}_k \geq 0$ であり，これは $p(k) \geq 0$ を保証している．

なお，(2.42) から規格化因子 $1/p(k)$ を除いた写像

$$\hat{\rho} \;\mapsto\; \sum_{i}\hat{M}_{ki}\hat{\rho}\hat{M}_{ki}^{\dagger} \tag{2.51}$$

は，完全正値写像である．これは，部分系への量子測定をしたとき，全系の密度演算子の正値性が保たれるという条件に対応している．ここでトレースが保存されないのは，(2.51) の右辺のトレース（測定結果 k が得られる確率 $p(k)$ に等しい）が一般には 1 よりも小さいからである．なお，$p(k) = 1$ の場合は，(2.51) は CPTP 写像となる．なお，任意の完全正値写像は，適当なクラウス演算子を用いて (2.51) の形に書けることが知られている*4)．

2.2 測定に伴う誤差と反作用

次に，量子測定に伴う誤差（誤差）と，測定の反作用（測定による状態変化）を，定量的に評価する方法について議論する．

2.2.1 測定に伴う誤差

2.2.1.1 測定誤差の特徴付け

まずは測定に伴う誤差について考えよう．2.1.3 節と同じ設定と記法で，間接測定を考える．実際に測りたいシステムの物理量のスペクトル分解を

$$\hat{A} = \sum_{k}\alpha_k\hat{P}_k \tag{2.52}$$

とする．ただし $k \neq l$ なら $\alpha_k \neq \alpha_l$ とする．

*4) 証明は [34] などを参照．

間接測定の結果の期待値は，(2.46) と 2.47) を用いて

$$\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{meas}} := \sum_k r_k p(k) = \mathrm{tr}_{\mathrm{SP}}[\hat{U}^\dagger \hat{R} \hat{U} \hat{\rho} \otimes \hat{\rho}_{\mathrm{P}}] \tag{2.53}$$

で与えられる．ここで，$\hat{R}$ はプローブに対して射影測定する物理量，$\hat{U}$ はプローブとシステムの相互作用を表すユニタリ演算子である．後の便宜のために

$$\hat{E} := \sum_k r_k \hat{E}_k = \mathrm{tr}_{\mathrm{P}}[\hat{U}^\dagger \hat{R} \hat{U} \hat{\rho}_{\mathrm{P}}] \tag{2.54}$$

という演算子を定義する．なお，中辺から右辺への変形に (2.47) を用いた．このとき，測定結果の期待値は

$$\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{meas}} = \mathrm{tr}[\hat{E}\hat{\rho}] \tag{2.55}$$

と書ける．一方で，物理量の真の期待値（誤差のない測定をしたときの期待値）は，ボルンの確率規則より

$$\langle\hat{A}\rangle := \mathrm{tr}[\hat{A}\hat{\rho}] \tag{2.56}$$

で与えられる．測定に誤差がある場合，これは測定結果の期待値とは異なりうる．

また，間接測定の結果の分散は，

$$\begin{aligned}\langle\Delta\hat{A}^2\rangle_{\mathrm{meas}} &:= \sum_k r_k^2 p(k) - \left(\sum_k r_k p(k)\right)^2 \\ &= \mathrm{tr}_{\mathrm{SP}}[\hat{U}^\dagger \hat{R}^2 \hat{U} \hat{\rho} \otimes \hat{\rho}_{\mathrm{P}}] - (\mathrm{tr}_{\mathrm{SP}}[\hat{U}^\dagger \hat{R} \hat{U} \hat{\rho} \otimes \hat{\rho}_{\mathrm{P}}])^2\end{aligned} \tag{2.57}$$

で与えられる．一方，物理量の真の分散（誤差のない測定をしたときの分散）は，

$$\langle\Delta\hat{A}^2\rangle := \mathrm{tr}[\hat{A}^2\hat{\rho}] - (\mathrm{tr}[\hat{A}\hat{\rho}])^2 \tag{2.58}$$

である．測定に誤差があれば，両者はやはり異なりうる．

以上により，真の期待値と測定結果の期待値の差，あるいは真の分散と測定結果の分散の差はいずれも測定誤差の尺度になりうることが分かる．以下では，これをさらに精密に考えてみよう．

まず，**誤差演算子**を

$$\hat{N} := \hat{U}^\dagger \hat{R} \hat{U} - \hat{A} \tag{2.59}$$

と定義する．これは，ハイゼンベルク表示での $\hat{R}$ と，システムの物理量 $\hat{A}$ の差をとったものである．これを用いて，測定誤差の二乗平均を

$$\langle\hat{N}^2\rangle := \mathrm{tr}_{\mathrm{SP}}[\hat{N}^2 \hat{\rho} \otimes \hat{\rho}_{\mathrm{P}}] \tag{2.60}$$

と定義する．これは，(2.47) などを用いると

$$\begin{aligned}\langle\hat{N}^2\rangle &= \mathrm{tr}\left[\left(\sum_k r_k^2 \hat{E}_k - \hat{E}\hat{A} - \hat{A}\hat{E} + \hat{A}^2\right)\hat{\rho}\right] \\ &= \sum_k \mathrm{tr}[(r_k\hat{I} - \hat{A})\hat{E}_k(r_k\hat{I} - \hat{A})\hat{\rho}]\end{aligned} \tag{2.61}$$

と書ける．この $\langle\hat{N}^2\rangle$ が測定に伴う誤差の一つの尺度になっていることを以下に示す．

2.2.1.2　誤差のない測定の条件

まず，$\langle \hat{N}^2 \rangle$ が 0 かどうかを見れば，測定に誤差がないかどうかを判定することができる．すなわち，以下の定理が成り立つ．

定理　任意の $\hat{\rho}$ に対して $\langle \hat{N}^2 \rangle = 0$ であるための必要十分条件は，$r_k = \alpha_k$ かつ $\hat{E}_k = \hat{P}_k$（すなわち，誤差のない測定であること）である．ただし，添え字 k の並べ替えの任意性は除く．

この定理の証明は以下の通り．まず (2.61) より，任意の $\hat{\rho}$ に対して $\langle \hat{N}^2 \rangle = 0$ であるための必要十分条件は，任意の k に対して

$$(r_k \hat{I} - \hat{A})\hat{E}_k(r_k \hat{I} - \hat{A}) = 0 \tag{2.62}$$

が成り立つことである．もし $r_k = \alpha_k$ かつ $\hat{E}_k = \hat{P}_k$ ならば，これは明らかに成立する．逆に，(2.62) がある k について成立しているとする．このとき，両辺の両側から $\hat{P}_l$ ではさむことで

$$(r_k - \alpha_l)^2 \hat{P}_l \hat{E}_k \hat{P}_l = 0 \tag{2.63}$$

が任意の l について成立する．$\hat{E}_k \neq 0$ とすると，少なくとも一つの l について $\hat{P}_l \hat{E}_k \hat{P}_l \neq 0$ なので，その l に対して $r_k = \alpha_l$ となる．簡単のために，その l を k とする（添え字の取り方は任意であった）．$l \neq k$ のとき $r_l \neq r_k$ と仮定していたので，$l \neq k$ のとき $\hat{P}_l \hat{E}_k \hat{P}_l = 0$ になる．すなわち，$\hat{E}_k$ のサポートは，$\hat{P}_k$ のサポートに含まれている[*5]．以上が任意の k について言える．したがって，完全性条件 $\sum_k \hat{E}_k = \hat{I}$ より，$\hat{E}_k = \hat{P}_k$ でなければならない．これで証明が完了した．

2.2.1.3　不偏性条件を満たす測定

次に，$\langle \hat{N}^2 \rangle$ の物理的意味がより明白となるような，特別な測定のクラスを考えよう．すべての $\hat{\rho}$ に対して

$$\langle \hat{A} \rangle_{\mathrm{meas}} = \langle \hat{A} \rangle \tag{2.64}$$

が成立するとき，すなわち測定結果の期待値と物理量の真の期待値が一致するとき，測定は**不偏性条件**（**unbiasedness condition**）を満たすという．後の便宜のために

$$\hat{n} := \mathrm{tr}_{\mathrm{P}}[\hat{N}\hat{\rho}_{\mathrm{P}}] = \hat{E} - \hat{A} \tag{2.65}$$

という演算子を導入する．ここで，tr_{P} はプローブについてのみトレースをとることを示している．このとき (2.64) は，

$$\mathrm{tr}[\hat{n}\hat{\rho}] = 0 \tag{2.66}$$

と書ける．すなわち，測定が不偏性を満たすための必要十分条件は，

$$\hat{n} = 0 \tag{2.67}$$

あるいは

---

*5)　エルミート演算子 $\hat{A}$ のサポートとは，ゼロでない固有値の固有ベクトルで張られる部分空間のことである．

$$\hat{E} = \hat{A} \tag{2.68}$$

である．

さて，測定が不偏性条件を満たしているとき，

$$\langle \Delta \hat{A}^2 \rangle_{\mathrm{meas}} = \langle \hat{N}^2 \rangle + \langle \Delta \hat{A}^2 \rangle \tag{2.69}$$

が成立する．実際，$\hat{n} = 0$ が成り立っていれば

$$\begin{aligned}\langle \Delta A^2 \rangle_{\mathrm{meas}} &= \mathrm{tr}_{\mathrm{SP}}[(\hat{A} + \hat{N})^2 \rho \otimes \hat{\rho}_{\mathrm{P}}] - (\mathrm{tr}[\hat{A}\hat{\rho}])^2 \\ &= \mathrm{tr}[\hat{A}^2 \hat{\rho}] + \mathrm{tr}[(\hat{n}\hat{A} + \hat{A}\hat{n})\hat{\rho}] + \mathrm{tr}_{\mathrm{SP}}[\hat{N}^2 \hat{\rho} \otimes \hat{\rho}_{\mathrm{P}}] - (\mathrm{tr}[\hat{A}\hat{\rho}])^2 \\ &= \mathrm{tr}_{\mathrm{SP}}[\hat{N}^2 \hat{\rho} \otimes \hat{\rho}_{\mathrm{P}}] + \mathrm{tr}[\hat{A}^2 \hat{\rho}] - (\mathrm{tr}[\hat{A}\hat{\rho}])^2\end{aligned} \tag{2.70}$$

となる．すなわち，この場合，測定結果の分散から物理量の真の分散を引けば，$\langle \hat{N}^2 \rangle$ が得られることになる．

さて，量子光学などでよくある以下のような設定を考えよう．G を増幅率を表す実数として，$\hat{A}$ と $\hat{R}$ が

$$\hat{U}^\dagger \hat{R} \hat{U} = G\hat{A} + \hat{N} \tag{2.71}$$

という線形関係を満たすとする．ここで $\hat{N}$ はノイズを記述する演算子である．誤差演算子 $\hat{N}$ は，任意の $\hat{\rho}$ に対して $\mathrm{tr}_{\mathrm{SP}}[\hat{N}\hat{\rho} \otimes \hat{\rho}_{\mathrm{P}}] = 0$ を満たすとする．この状況は，そのままでは不偏性条件を満たさないが，増幅率 G で規格化した量を考えると

$$\hat{A}_{\mathrm{out}} := \hat{U}^\dagger \frac{\hat{R}}{G} \hat{U} = \hat{A} + \frac{\hat{N}}{G} \tag{2.72}$$

となり，不偏性条件 $\langle \hat{A}_{\mathrm{out}} \rangle = \langle \hat{A} \rangle$ を満たす．このとき，測定誤差の大きさとして

$$\frac{1}{G^2} \langle \hat{N}^2 \rangle \tag{2.73}$$

を考えるのが有用である．これは，出力に現れた雑音を入力の段階で発生した雑音（増幅前の値）に換算することに対応する．(2.73) を**入力等価雑音**（**input equivalent noise**）という．

2.2.2　測定の反作用と量子非破壊測定

2.2.2.1　測定の反作用の特徴付け

次に，量子測定の反作用について考えよう．古典論では測定しても系の状態が変わらない，すなわち，測定の反作用がない測定が可能である．しかし，量子論ではある物理量を測定するとその反作用が，測りたい物理量かそれに共役な物理量のどちらか，あるいは両方におよぶ．

前節と同じ設定と記法を用いる．物理量 $\hat{A}$ を測定したときに，物理量 $\hat{B}$ への反作用を特徴づける**反作用演算子**を

$$\hat{D}_B := \hat{U}^\dagger \hat{B} \hat{U} - \hat{B} \tag{2.74}$$

と定義する．反作用の大きさを

$$\langle \hat{D}_B^2 \rangle = \mathrm{tr}_{\mathrm{SP}}[\hat{D}_B^2 \hat{\rho} \otimes \hat{\rho}_{\mathrm{P}}] \tag{2.75}$$

と定義する．任意の $\hat{\rho}$ に対して

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{SP}}[\hat{D}_B\hat{\rho}\otimes\hat{\rho}_{\mathrm{P}}] = 0 \tag{2.76}$$

が成り立つならば，この反作用は不偏性条件を満たすという．このとき，誤差演算子のときと同様の議論により

$$\langle\hat{U}^\dagger\Delta\hat{B}^2\hat{U}\rangle = \langle\hat{D}_B^2\rangle + \langle\Delta\hat{B}^2\rangle \tag{2.77}$$

が成り立つことが証明できる．ここで $\Delta B := \hat{B} - \langle\hat{B}\rangle$，$\langle\cdots\rangle := \mathrm{tr}_{\mathrm{SP}}[\cdots\hat{\rho}\otimes\hat{\rho}_{\mathrm{P}}]$ である．(2.77) の右辺の第二項は物理量 $\hat{B}$ の測定前のゆらぎ，第一項は測定の反作用により付け加わったゆらぎである．

2.2.2.2 量子非破壊測定

一般に，量子測定には不可避な反作用がある．しかし以下で議論するように，ある特定の物理量に対しては，測定の影響を与えないようにすることができる．これを**量子非破壊測定（Quantum Non-Demolition measurement, QND 測定）**という．

クラウス演算子 $\{\hat{M}_{ki}\}$ に対応する量子測定を考える．測定前のシステムの密度演算子を $\hat{\rho}$ として，測定後の状態のアンサンブル平均を，(2.43) にならって $\hat{\rho}' := \sum_{ki}\hat{M}_{ki}\hat{\rho}\hat{M}_{ki}^\dagger$ とする．この測定が，ある物理量 $\hat{A} = \sum_l \alpha_l\hat{P}_l$（$l \neq m$ なら $\alpha_l \neq \alpha_m$）を変化させない，すなわち $\hat{A}$ に関して非破壊であるとは，任意の $\hat{\rho}$ および任意の l に対して，

$$\mathrm{tr}[\hat{P}_l\hat{\rho}] = \mathrm{tr}[\hat{P}_l\hat{\rho}'] \tag{2.78}$$

が成り立つことであると定義する．あるいは等価なことだが，任意の l に対して

$$\hat{P}_l = \sum_{ki}\hat{M}_{ki}^\dagger\hat{P}_l\hat{M}_{ki} \tag{2.79}$$

が成り立つこととする．これを **QND 条件**という．このとき，測定の前後で，$\hat{A}$ の確率分布（ボルンの確率規則から決まる分布）は変化しないことが分かる．とくに，$\hat{A}$ の測定が $\hat{A}$ に関して非破壊であるような測定を，$\hat{A}$ の QND 測定という．

たとえば，$\hat{A}$ の射影測定は，上記の QND 条件を満たしている．実際，

$$\hat{P}_l = \sum_k \hat{P}_k\hat{P}_l\hat{P}_k \tag{2.80}$$

が成り立つ．すなわち，$\hat{A}$ の射影測定は $\hat{A}$ の QND 測定の特別な場合である．実際，射影測定を何度繰り返しても，必ずボルンの確率規則に従った同じ確率分布が得られる．しかしながら，2.1 節で議論したキュービット系の吸収型測定は QND 測定ではない．

さて，システムのハミルトニアンを $\hat{H}_{\mathrm{S}}$，システムとプローブの相互作用ハミルトニアンを $\hat{H}_{\mathrm{int}}$ とすると，QND 測定は

$$[\hat{H}_{\mathrm{S}}, \hat{A}] = 0,\ [\hat{H}_{\mathrm{int}}, \hat{A}] = 0 \tag{2.81}$$

が満たされていれば実現できる．そこで (2.81) も QND 条件と呼ぶ*6)．(2.81) の二つの

---

*6) 厳密には，(2.79) と (2.81) は等価ではなく，後者は前者の十分条件である．すなわち，(2.79) の方がより一般的な条件である．

条件のうち前者は，システムだけのハミルトニアンのもとで $\hat{A}$ が保存量になる条件，後者は測定過程において $\hat{A}$ が反作用を受けない条件である．実際このとき，ハイゼンベルク表示での $\hat{A}$ の時間発展は

$$\hat{A}(t) = \hat{A} \tag{2.82}$$

となり，被測定量が測定の反作用を受けないことが分かる．

また，量子非破壊測定は，反作用演算子を使っても特徴づけることができる．すなわち，次の定理が成り立つ．

定理　ある測定が物理量 $\hat{A}$ に関して非破壊であるための必要十分条件は，システムの任意の初期状態 $\hat{\rho}$ について $\langle \hat{D}_A^2 \rangle = 0$ となることである．

証明は以下の通り．まず，物理量 $\hat{A} = \sum_l \alpha_l \hat{P}_l$（$l \neq m$ なら $\alpha_l \neq \alpha_m$）について，

$$\hat{E}_l^A := \mathrm{tr_P}[\hat{U}^\dagger \hat{P}_l \hat{U} \hat{\rho}_\mathrm{P}] = \sum_{ki} \hat{M}_{ki}^\dagger \hat{P}_l \hat{M}_{ki} \tag{2.83}$$

とおく．このとき，2.1.2.2 節の測定誤差に関する定理の証明と同様に，任意の $\hat{\rho}$ について $\langle \hat{D}_A^2 \rangle = 0$ であることの必要十分条件が

$$\hat{E}_l^A = \hat{P}_l \tag{2.84}$$

であることが分かる．これは QND 条件 (2.79) に他ならない．

2.3　いろいろな不確定性関係

不確定性関係は，量子状態の準備，時間発展，および測定過程において本質的な役割を演じる．とくに，量子系そのもののもつ不確定性と，それを測定する測定器もまた量子力学に従うという事実に起因する不確定性関係の二重構造を理解することが，量子測定と制御において重要なポイントとなる．被測定系そのものがもつ量子ゆらぎは，**ケナード・ロバートソン（Kennard-Robertson）の不確定性関係**によって特徴づけられる．測定過程に起因する誤差は，歴史的にはハイゼンベルクやボーア（Bohr）によって議論されたが，定量的には**アーサー・ケリー・グッドマン（Arthurs-Kelly-Goodman）の不確定性関係**によって特徴づけられる．本節ではこれらの不確定性関係について詳しく議論する．

2.3.1　ケナード・ロバートソンの不確定性関係

量子力学の教科書で通常議論される不確定性関係は，ケナード・ロバートソンの不確定性関係である*7)．これは測定過程とは独立な量子状態そのもののもつ非決定性（indeterminacy）を表しており，非可換な二つの物理量の量子ゆらぎの積の下限を与える不等式で表される．量子状態を $\hat{\rho}$ として，物理量 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の量子ゆらぎを，それらの分散

$$\langle \Delta\hat{A}^2 \rangle := \mathrm{tr}[\hat{A}^2\hat{\rho}] - (\mathrm{tr}[\hat{A}\hat{\rho}])^2,\ \langle \Delta\hat{B}^2 \rangle := \mathrm{tr}[\hat{B}^2\hat{\rho}] - (\mathrm{tr}[\hat{B}\hat{\rho}])^2 \tag{2.85}$$

で定義しよう．これらの量子ゆらぎは，それぞれの物理量を別々に誤差なく測定した時

*7)　原論文は [35], [36] を参照．

に，測定結果の分散として得られるものである．ここで，たとえ物理量を誤差なく測定しても，測定ごとに結果がばらつくという点に注意しよう．すなわち，このようにして得られた分散は（測定過程とは無関係な）系そのものがもつ固有の量子ゆらぎであると解釈できる．このとき，よく知られた不等式

$$\langle\Delta\hat{A}^2\rangle\langle\Delta\hat{B}^2\rangle \geq \frac{1}{4}\left|\mathrm{tr}[[\hat{A},\hat{B}]\hat{\rho}]\right|^2 \tag{2.86}$$

が成立する．すなわち，$\hat{A}$ と $\hat{B}$ が非可換で右辺がゼロにならなければ，両者の量子ゆらぎを同時にゼロにすることはできない．なお，(2.86) の左辺を標準偏差の積の形で書くと

$$\sqrt{\langle\Delta\hat{A}^2\rangle}\sqrt{\langle\Delta\hat{B}^2\rangle} \geq \frac{1}{2}\left|\mathrm{tr}[[\hat{A},\hat{B}]\hat{\rho}]\right| \tag{2.87}$$

となる．(2.86) および (2.87) が，ケナード・ロバートソンの不確定性関係である．

(2.86) の証明は以下の通りである．$\Delta\hat{A} := \hat{A} - \mathrm{tr}[\hat{A}\hat{\rho}]$，$\Delta\hat{B} := \hat{B} - \mathrm{tr}[\hat{B}\hat{\rho}]$ とする．実変数 x についての二次式

$$\begin{aligned} f(x) &:= \mathrm{tr}[(x\Delta\hat{A} + \mathrm{i}\Delta\hat{B})^\dagger(x\Delta\hat{A} + \mathrm{i}\Delta\hat{B})\hat{\rho}] \\ &= \mathrm{tr}[\Delta\hat{A}^2\hat{\rho}]x^2 + \mathrm{tr}[\mathrm{i}[\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}]\hat{\rho}]x + \mathrm{tr}[\Delta\hat{B}^2\hat{\rho}] \end{aligned} \tag{2.88}$$

を考える．ここで $\mathrm{i}[\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}]$ はエルミート演算子なので，x の係数は実数であることに注意しよう．定義より $f(x)$ は任意の x について非負なので，その判別式は

$$(\mathrm{tr}[\mathrm{i}[\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}]\hat{\rho}])^2 - 4\mathrm{tr}[\Delta\hat{A}^2\hat{\rho}]^2\mathrm{tr}[\Delta\hat{B}^2\hat{\rho}]^2 \leq 0 \tag{2.89}$$

を満たす．ここで $[\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}] = [\hat{A},\hat{B}]$ に注意すると，(2.86) が得られる．

(2.86) の等号を達成する状態を，$\hat{A}$ と $\hat{B}$ の量子ゆらぎに関する**最小不確定性状態**という．実験で (2.86) を検証するためには，同じ量子状態 $\hat{\rho}$ を多数用意してそれを二つのグループに分け，一方のグループに対しては $\hat{A}$ のみを測定し，他方のグループに対しては $\hat{B}$ のみを測定する（図 2.2 (a)）．こうして $\langle\Delta\hat{A}^2\rangle$ と $\langle\Delta\hat{B}^2\rangle$ をそれぞれ別々に測定できる．同じサンプルに対して $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の両方を測定するのではないことに注意しよう．このことは，$\langle\Delta\hat{A}^2\rangle$ と $\langle\Delta\hat{B}^2\rangle$ がともに同じ状態 $\hat{\rho}$ に対する期待値であることから理解できる．一方，図 2.2 (b) のように同じ系に対して非可換な物理量を同時に測ると，(2.86) とは異なった不確定性関係が成立する．これについては．2.3.3 節で議論する．

2.3.2 時間とエネルギーの不確定性関係

時間とエネルギーの不確定性関係は，ケナード・ロバートソンの不確定性関係とは本質的に異なる．その理由は，時刻 t はパラメータであり，演算子で表される物理量ではないことである．したがって，2.3.1 節と同じ議論をすることはできない．

そこで異なる観点から時間とエネルギーの不確定性関係を定式化するために，ある状態がどのくらい変化するかに着目しよう．時刻に依存しないハミルトニアン $\hat{H}$ でのユニタリ発展を考える．時刻 0 における状態ベクトルを $|\psi\rangle$ とする．このとき，時刻 t における状態ベクトルは，(1.28) を展開して t の二次まで残すと

$$|\psi(t)\rangle = \left(1 - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t - \frac{1}{2\hbar^2}\hat{H}^2t^2\right)|\psi\rangle + o(t^2) \tag{2.90}$$

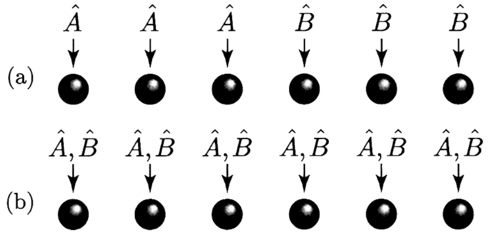


図 2.2　N 個の量子系のサンプルに対する測定の模式図．(a) ケナード・ロバートソンの不確定性関係の設定．同じ量子状態 $\hat{\rho}$ に用意された多数のサンプルを二つに分け，その一方に対しては $\hat{A}$ を，他方に対しては $\hat{B}$ をそれぞれ誤差なく測定する．(b) 同時測定の設定．各サンプルに対して $\hat{A}$ と $\hat{B}$ を同時に測定する．

となる．これと初期状態 $|\psi\rangle$ のオーバーラップを計算すると

$$|\langle\psi|\psi(t)\rangle|^2 = 1 - \frac{t^2}{\hbar^2}(\Delta\hat{H})^2 + o(t^2) \tag{2.91}$$

となる．ここで $(\Delta\hat{H})^2 := \langle\psi|\hat{H}^2|\psi\rangle - (\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle)^2$ とした．したがって，$|\psi(t)\rangle$ が $|\psi\rangle$ からある程度離れて両者の内積がゼロになるまでの時間を δt とすると

$$\frac{\delta t^2}{\hbar^2}(\Delta\hat{H})^2 \simeq 1 \tag{2.92}$$

すなわち

$$\delta t(\Delta\hat{H}) \simeq \hbar \tag{2.93}$$

が成立する．これが時間とエネルギーの不確定性関係の一つの定式化である．

ここでは，状態がどのくらい変化したか，すなわち状態の識別可能性の観点から不確定性関係を考えた．3.2.5 節では，このような観点を発展させることで時間とエネルギーの不確定性関係を精密に定式化して，量子推定理論の観点から厳密に成り立つ不等式を導出する．

最後に，時刻を演算子で表すことが可能かを考えておこう．仮に，あるエルミート演算子 $\hat{t}$ があり，ハミルトニアンとの交換関係 $[\hat{H},\hat{t}] = \mathrm{i}\hbar$ が成立しているとする．この仮定のもとでは，$\hat{t}$ と $\hat{H}$ との間にケナード・ロバートソンの不確定性関係 (2.86) が成立し，その下限は $\hbar^2/4$ となる．もしもこのような $\hat{t}$ があれば，任意の実数 θ に対して，$e^{\mathrm{i}\theta\hat{t}/\hbar}\hat{H}e^{-\mathrm{i}\theta\hat{t}/\hbar} = \hat{H} + \theta$ が成立する．したがって，任意の状態 $|\psi\rangle$ に対して状態 $|\psi_\theta\rangle = e^{-\mathrm{i}\theta\hat{t}/\hbar}|\psi\rangle$ を定義すると，$\langle\psi_\theta|\hat{H}|\psi_\theta\rangle = \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle + \theta$ となる．θ は任意の実数だったので，$\theta \to -\infty$ の極限を考えると，$|\psi_\theta\rangle$ はいくらでも小さな負のエネルギーをとりうることになる．これは，エネルギーには最小値があるという物理学の基本原理に反する．したがって，このようなエルミート演算子 $\hat{t}$ は存在しない．

これと同様の議論は，光子の個数演算子 $\hat{n} := \hat{a}^\dagger\hat{a}$（$\hat{a}$ はあるモードの光の消滅演算子）と，古典的な電磁場の位相に対応する物理量の間の関係にも適用することができる．仮に，エルミートな位相演算子 $\hat{\phi}$ があって，$[\hat{n},\hat{\phi}] = \mathrm{i}$ という交換関係が満たされていたとする．この場合も，上記の議論と同様にして，$\hat{n}$ の期待値が負になる状態があることになり，矛盾が生じる．したがって，エルミートな位相演算子は存在しない．この意味で，光

子数と位相の不確定性関係も，ケナード・ロバートソン不等式の意味では理解できないことになる．なお，いずれの議論でも本質的なのは，$\hat{H}$ や $\hat{n}$ の固有値には最小値があるということである．

2.3.3 非可換な物理量の同時測定

次に，非可換な物理量の同時測定に関する不確定性関係を考える．以下で明らかになるように，非可換な物理量を同時に誤差なく測定することはできず，少なくとも一方の物理量に必ず誤差が生じる．ケナード・ロバートソンの不確定性関係は量子状態そのもののゆらぎの性質だったが，ここで考えるのは測定過程の量子性に起因する誤差の性質である．

$\hat{A}$ と $\hat{B}$ をシステムの物理量として，これらを同時に測定することを考える．システムとプローブをユニタリ演算子 $\hat{U}$ で相互作用させ，プローブの可換な物理量 $\hat{R}_A$ と $\hat{R}_B$ を直接同時に測定する．ここで，可換な物理量は同時固有状態をもつことができるため，それらは同時に誤差なく測定できることに注意しよう．そして，$\hat{R}_A$ から $\hat{A}$ の情報を，$\hat{R}_B$ から $\hat{B}$ の情報を読み出す．$\hat{A}$ と $\hat{B}$ の測定誤差に対応する演算子を

$$\hat{N}_A := \hat{U}^\dagger \hat{R}_A \hat{U} - \hat{A},\ \hat{N}_B := \hat{U}^\dagger \hat{R}_B \hat{U} - \hat{B} \tag{2.94}$$

と定義する．ここで導入された演算子は次のように解釈できる．プローブ系の物理量 $\hat{R}_{A(B)}$ はいわば測定器のメーターの役割を果たしている．そのメーターの「針」の位置はシステムとプローブとのユニタリ相互作用によって，新しい位置 $\hat{U}^\dagger \hat{R}_{A(B)} \hat{U}$ へと動く．これがプローブから読み出すことのできる物理量であり，それともとの物理量 $\hat{A}(\hat{B})$ との差を，測定過程に起因する誤差と考えるのである．

ここで，$\hat{A}$ と $\hat{B}$ の同時測定は，両方の物理量に対して次の不偏性条件を満たすと仮定する．すなわち，任意のシステムの状態 $\hat{\rho}$ に対して

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \hat{A} \rangle_{\mathrm{meas}},\ \langle \hat{B} \rangle = \langle \hat{B} \rangle_{\mathrm{meas}} \tag{2.95}$$

が成り立つとする．このとき，

$$\langle \hat{N}_A^2 \rangle \langle \hat{N}_B^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \left| \mathrm{tr}[[\hat{A}, \hat{B}]\hat{\rho}] \right|^2 \tag{2.96}$$

が成立する．これがアーサー・ケリー・グッドマンの不確定性関係である*8)．すなわち，測定誤差に対しても，ケナード・ロバートソンの不確定性関係と同じ形の不等式が成り立つ．したがって，(2.96) の右辺がゼロでなければ，物理量 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ を誤差なく同時測定することはできない．これはボーアの「相補性原理」に関する議論を思い起こさせる．ボーアによると，「相補的な物理量の曖昧さのない定義を可能とする二つの実験手続がたがいに排他的である」[39] ことが量子論の重要な特徴である．

(2.96) の証明は以下の通りである．まず，

$$[\hat{U}^\dagger \hat{R}_A \hat{U}, \hat{U}^\dagger \hat{R}_B \hat{U}] = 0 \tag{2.97}$$

より

*8) 原論文は [37], [38] を参照．

$$[\hat{N}_A, \hat{N}_B] + [\hat{N}_A, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{N}_B] + [\hat{A}, \hat{B}] = 0 \tag{2.98}$$

が分かる．また，不偏性条件より

$$\hat{n}_A := \mathrm{tr}_{\mathrm{P}}[\hat{N}_A \hat{\rho}_{\mathrm{P}}] = 0,\ \hat{n}_B := \mathrm{tr}_{\mathrm{P}}[\hat{N}_B \hat{\rho}_{\mathrm{P}}] = 0 \tag{2.99}$$

が成立するので，

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{SP}}[[\hat{N}_A, \hat{B}]\hat{\rho} \otimes \hat{\rho}_{\mathrm{P}}] = \mathrm{tr}[[\hat{n}_A, \hat{B}]\hat{\rho}] = 0 \tag{2.100}$$

が成り立つ．同様に $\mathrm{tr}_{\mathrm{SP}}[[\hat{A}, \hat{N}_B]\hat{\rho} \otimes \hat{\rho}_{\mathrm{P}}] = 0$．したがって，(2.98) より

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{SP}}[[\hat{N}_A, \hat{N}_B]\hat{\rho} \otimes \hat{\rho}_{\mathrm{P}}] = -\mathrm{tr}[[\hat{A}, \hat{B}]\hat{\rho}] \tag{2.101}$$

が言える．ここで $\hat{N}_A$ と $\hat{N}_B$ にケナード・ロバートソンの不確定性関係を適用して

$$\langle \hat{N}_A^2 \rangle \langle \hat{N}_B^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \left| \mathrm{tr}_{\mathrm{SP}}[[\hat{N}_A, \hat{N}_B]\hat{\rho} \otimes \hat{\rho}_{\mathrm{P}}] \right|^2 = \frac{1}{4} \left| \mathrm{tr}[[\hat{A}, \hat{B}]\hat{\rho}] \right|^2 \tag{2.102}$$

を得る．こうしてアーサー・ケリー・グッドマンの不等式 (2.96) が示された．

さて，(2.96) から，測定結果の分散に関する不確定性関係

$$\langle \Delta \hat{A}^2 \rangle_{\mathrm{meas}} \langle \Delta \hat{B}^2 \rangle_{\mathrm{meas}} \geq \left| \mathrm{tr}[[\hat{A}, \hat{B}]\hat{\rho}] \right|^2 \tag{2.103}$$

を導くことができる．実際，(2.69) より

$$\begin{aligned} \langle \Delta \hat{A}^2 \rangle_{\mathrm{meas}} \langle \Delta \hat{B}^2 \rangle_{\mathrm{meas}} &= \left(\langle \Delta \hat{A}^2 \rangle + \langle \Delta \hat{N}_A^2 \rangle \right) \left(\langle \Delta \hat{B}^2 \rangle + \langle \Delta \hat{N}_B^2 \rangle \right) \\ &\geq \left(\sqrt{\langle \Delta \hat{A}^2 \rangle \langle \Delta \hat{B}^2 \rangle} + \sqrt{\langle \hat{N}_A^2 \rangle \langle \hat{N}_B^2 \rangle} \right)^2 \\ &\geq \left| \mathrm{tr}[[\hat{A}, \hat{B}]\hat{\rho}] \right|^2 \end{aligned} \tag{2.104}$$

が成り立つ．一行目から二行目への変形で，コーシー・シュワルツ（Cauchy-Schwarz）の不等式を用いた．このように，非可換な物理量の同時測定をすると，不偏性条件が満たされているならば，測定結果の標準偏差の積 $\sqrt{\langle \Delta \hat{A}^2 \rangle_{\mathrm{meas}}} \sqrt{\langle \Delta \hat{B}^2 \rangle_{\mathrm{meas}}}$ が，ケナード・ロバートソンの不確定性関係 (2.87) のちょうど 2 倍になる．これは直感的には，測定過程に起因するゆらぎが，系そのものがもつ量子ゆらぎと同等の寄与をすることを意味している．

不偏性条件が成り立たない場合

不偏性条件 (2.95) が満たされていないときは，アーサー・ケリー・グッドマンの不等式 (2.96) は必ずしも成立しない．すなわち，$\langle \hat{N}_A^2 \rangle \langle \hat{N}_B^2 \rangle < \left| \mathrm{tr}[[\hat{A}, \hat{B}]\hat{\rho}] \right|^2 / 4$ となる場合がありうる．たとえば，有限次元の量子系において，物理量 $\hat{A}$ の射影測定を考えよう．また，$\hat{B}$ については，測定結果が常に定数 b になると仮定する（これは $\hat{R}_B = b\hat{I}_{\mathrm{P}}$ と仮定することに対応している）．このとき，$\hat{B}$ についての情報は何も得られず，$\hat{B}$ についての不偏性条件も満たされない．また，$\left| \mathrm{tr}[[\hat{A}, \hat{B}]\hat{\rho}] \right| \neq 0$ を仮定する．以上のような状況を $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の同時測定とみなすと，$\langle \hat{N}_A^2 \rangle = 0$ かつ $\langle \hat{N}_B^2 \rangle < \infty$ なので (2.96) の左辺はゼロだが，右辺は仮定によりゼロではない．したがってこの場合は (2.96) が成立していない．

このように不偏性条件が満たされない場合でも，測定誤差の定義を適切に規格化すれば不偏性条件が成り立つ場合がある．簡単な例として，

$$\hat{U}^\dagger \hat{R}_A \hat{U} = G_A \hat{A} + \hat{N}'_A, \quad \hat{U}^\dagger \hat{R}_B \hat{U} = G_B \hat{B} + \hat{N}'_B \tag{2.105}$$

という線形関係が成り立つ場合を考えよう．ここで G_A と G_B は増幅率を表す実数で，また $\langle \hat{N}'_A \rangle = \langle \hat{N}'_B \rangle = 0$ が成り立つとする．この場合，$G_A \neq 1$，$G_B \neq 1$ ならば不偏性条件はそのままでは満たされない．そのため，(2.94) で定義した $\hat{N}_A := \hat{U}^\dagger \hat{R}_A \hat{U} - \hat{A}$ と $\hat{N}_B := \hat{U}^\dagger \hat{R}_B \hat{U} - \hat{B}$ に対しては，アーサー・ケリー・グッドマンの不等式 (2.96) は必ずしも成立しない*9)．しかし，この場合も，増幅率で規格化した量を考えると

$$\hat{U}^\dagger \frac{\hat{R}_A}{G_A} \hat{U} = \hat{A} + \frac{\hat{N}'_A}{G_A}, \quad \hat{U}^\dagger \frac{\hat{R}_B}{G_B} \hat{U} = \hat{B} + \frac{\hat{N}'_B}{G_B} \tag{2.106}$$

となり，不偏性条件が成立する．この場合は，$\langle \hat{N}'^2_A \rangle / G_A^2$ および $\langle \hat{N}'^2_B \rangle / G_B^2$ に対して，アーサー・ケリー・グッドマンの不等式 (2.96) が成立する:

$$\frac{\langle \hat{N}'^2_A \rangle}{G_A^2} \frac{\langle \hat{N}'^2_B \rangle}{G_B^2} \geq \frac{1}{4} |\mathrm{tr}[[\hat{A}, \hat{B}]\hat{\rho}]|^2. \tag{2.107}$$

ここで $\langle \hat{N}'^2_A \rangle / G_A^2$ と $\langle \hat{N}'^2_B \rangle / G_B^2$ は，(2.73) で議論した入力等価雑音に他ならない．すなわちアーサー・ケリー・グッドマンの不等式 (2.96) は，誤差の素朴な定義 (2.94) に対しては成立しない場合でも，入力等価雑音に対しては成立する*10)．

なお，(2.105) のような線形関係が成り立たない場合でも，量子推定理論を用いれば本質的に同じ議論が可能である．すなわち，測定結果のデータに非線形な処理をして，不偏性条件を成り立たせる（すなわち，測定結果から物理量の期待値を推定する）ことが可能である．この場合に入力等価雑音に相当する概念を 3.2.4 節で，それを用いた不確定性関係について 3.2.5 節で議論する．

誤差と反作用の不確定性関係

最後に，同時測定の設定を離れて，物理量 $\hat{A}$ だけを測定する場合を考え，それによる別の物理量 $\hat{B}$ への反作用を議論する．$\hat{A}$ の測定は不偏性条件を満たしているとする．2.2.2 節の (2.74) で導入した反作用演算子 $\hat{D}_B$ を考え，この反作用が不偏性条件 (2.76) を満たしているとする．このとき，アーサー・ケリー・グッドマンの不等式 (2.96) のときと同様の議論により，

$$\langle \hat{N}_A^2 \rangle \langle \hat{D}_B^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \left| \mathrm{tr}[[\hat{A}, \hat{B}]\hat{\rho}] \right|^2 \tag{2.108}$$

を示せる．このように，測定誤差と反作用の間にも，ケナード・ロバートソンと同じ形の不確定性関係が成立する．なお，測定や反作用が不偏性条件を満たしていない場合は，(2.108) は必ずしも成立しない．しかしそのような場合でも，入力等価雑音に相当するものを考えることで，(2.108) の形の不確定性関係が成立する*11)．

*9) このような場合でも，$\langle \hat{N}_A^2 \rangle$ と $\langle \hat{N}_B^2 \rangle$ に対して必ず成り立つ不等式も知られている[40]．

*10) 不偏性条件が満たされない場合でも，入力等価雑音を考えればケナード・ロバートソンと同じ形の不確定性関係が成り立つことは，以前から認識されていた．アーサーとグッドマンの原論文[38]でも増幅率が議論されており，量子光学のレビュー [41] や教科書 [11] でも本質的に同じ議論がされている．

*11) この誤差と反作用の不確定性関係 (2.108) は，ハイゼンベルクがガンマ線顕微鏡の思考実験で見出した不確定性関係[44]に類似している．そのため，(2.108) が「ハイゼンベルクの不確定性関係」と呼ばれることがある．また，不偏性条件が満たされておらず (2.108) が成り立たない場合に，「ハイゼン

2.4 量子測定の具体例

本節では量子測定の具体例を考える．まず 2.4.1 節で，シンプルな具体例として，位置と運動量に関するフォンノイマンの測定モデルを取り上げ，測定誤差や反作用について議論する．次に 2.4.2 節から 2.4.5 節で，実際の実験において電磁場やスピンなどの量子測定がどのように実現されるかを紹介する．

2.4.1 フォンノイマンの測定モデル

システムとプローブがともに位置と運動量で記述される系を考える．$(\hat{x},\hat{p})$ と $(\hat{X},\hat{P})$ を，それぞれシステムとプローブの位置と運動量の組とする．これらは正準交換関係

$$[\hat{x},\hat{p}]=\mathrm{i}\hbar,\ [\hat{X},\hat{P}]=\mathrm{i}\hbar \tag{2.109}$$

を満たす．簡単のためにシステムとプローブの自由ハミルトニアン*12)は無視し，両者の相互作用ハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\mathrm{int}}:=\alpha\hat{x}\hat{P} \tag{2.110}$$

で与えられるとする*13)．

$|x\rangle$ と $|X\rangle$ を，それぞれシステムとプローブの位置固有状態とする:

$$\hat{x}|x\rangle=x|x\rangle,\ \hat{X}|X\rangle=X|X\rangle. \tag{2.111}$$

システムとプローブの初期状態の状態ベクトルを $|\psi\rangle$，$|\psi_{\mathrm{P}}\rangle$ として，全系の初期状態ベクトルを $|\Psi\rangle=|\psi\rangle|\psi_{\mathrm{P}}\rangle$ とする．$|\psi\rangle$ と $|\psi_{\mathrm{P}}\rangle$ を位置固有状態で表示した時の確率振幅を，それぞれ

$$\psi(x):=\langle x|\psi\rangle,\ \psi_{\mathrm{P}}(X):=\langle X|\psi_{\mathrm{P}}\rangle \tag{2.112}$$

とおく．これらは（位置表示の）**波動関数**に他ならない．また，シュレーディンガー表示での時刻 t の全系の状態ベクトルを $|\Psi(t)\rangle$ と書き，その位置表示の波動関数を

$$\Psi(x,X;t):=\langle x|\langle X|\Psi(t)\rangle \tag{2.113}$$

とする．

まずシュレーディンガー表示で考えよう．ハミルトニアンを (2.110) とするシュレーディンガー方程式を位置表示すると

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,X;t)=-\mathrm{i}\hbar\alpha x\frac{\partial}{\partial X}\Psi(x,X;t) \tag{2.114}$$

が得られる．初期条件 $\Psi(x,X;0)=\psi(x)\psi_{\mathrm{P}}(X)$ についてこれを解くと

$$\Psi(x,X;t)=\psi(x)\psi_{\mathrm{P}}(X-\alpha tx) \tag{2.115}$$

ベルクの不確定性関係が破れた」と言われることがある[42]．しかしこの場合でも，入力等価雑音を考えれば (2.108) の形の不等式が成立することは，[43] などで指摘された．このように入力等価雑音を考えることの重要性は，以前から議論されている（脚注 10 も参照）．また，ハイゼンベルクの議論は本質的に半古典論であり，現代的な量子測定理論と直接関連付ける際には注意が必要である．

*12) システムやプローブだけの（相互作用を含まない）ハミルトニアンを，自由ハミルトニアンと呼ぶ．

*13) 測定過程におけるこのような相互作用ハミルトニアンは [4] で議論された．

となる．簡単のために，システムとプローブが相互作用する時間を $\tau := \alpha^{-1}$ とすると，相互作用後の状態は

$$\Psi(x, X; \tau) = \psi(x)\psi_{\mathrm{P}}(X - x) \tag{2.116}$$

となる．この状態に対して，プローブの位置 $\hat{X}$ を射影測定する．このとき，測定結果が X である確率密度は

$$P[X] = \int |\psi(x)|^2 |\psi_{\mathrm{P}}(X - x)|^2 dx \tag{2.117}$$

となる．とくに，プローブの初期状態が $|\psi_{\mathrm{P}}(X)|^2 = \delta(X)$ を満たすとき（ここで $\delta(X)$ はディラックのデルタ関数），

$$P[X] = |\psi(X)|^2 \tag{2.118}$$

となり，$X = x$ とするとボルンの確率規則と一致する．すなわち，この場合の測定は $\hat{x}$ の誤差のない測定になる．

次にハイゼンベルク表示で考える．ハイゼンベルク方程式は

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = 0,\ \frac{d\hat{p}(t)}{dt} = -\alpha\hat{P}, \tag{2.119}$$

$$\frac{d\hat{X}(t)}{dt} = \alpha\hat{x},\ \frac{d\hat{P}(t)}{dt} = 0 \tag{2.120}$$

なので，これを $\hat{x}(0) = \hat{x}$，$\hat{p}(0) = \hat{p}$，$\hat{X}(0) = \hat{X}$，$\hat{P}(0) = \hat{P}$ という条件のもとで解くと

$$\hat{x}(t) = \hat{x},\ \hat{p}(t) = \hat{p} - \alpha t\hat{P}, \tag{2.121}$$

$$\hat{X}(t) = \hat{X} + \alpha t\hat{x},\ \hat{P}(t) = \hat{P} \tag{2.122}$$

が得られる．とくに $\hat{x}(t) = \hat{x}$ は，この測定が $\hat{x}$ についての QND 測定であることを示している．$t = \tau$ を考えると $\alpha\tau = 1$ なので，

$$\hat{x}(\tau) = \hat{x},\ \hat{p}(\tau) = \hat{p} - \hat{P} \tag{2.123}$$

$$\hat{X}(\tau) = \hat{X} + \hat{x},\ \hat{P}(\tau) = \hat{P} \tag{2.124}$$

となる．$|\psi_{\mathrm{P}}\rangle$ が

$$\langle\psi_{\mathrm{P}}|\hat{X}|\psi_{\mathrm{P}}\rangle = 0 \tag{2.125}$$

を満たしていれば，この測定は不偏性条件 (2.64) を満たす．以下これを仮定する．ノイズ演算子を

$$\hat{N}_x := \hat{X}(\tau) - \hat{x} = \hat{X} \tag{2.126}$$

と定義すると，

$$\langle\hat{N}_x^2\rangle = \langle\psi_{\mathrm{P}}|\hat{X}^2|\psi_{\mathrm{P}}\rangle \tag{2.127}$$

となる．すなわち，プローブの位置の分散が $\hat{x}$ の測定精度を決める．$\langle\psi_{\mathrm{P}}|\hat{X}^2|\psi_{\mathrm{P}}\rangle \to 0$ の極限で，誤差のない測定に近づく．これはシュレーディンガー表示のときに得た結果と整合している．さらにいまの場合は縮退のない QND 測定なので，この極限で射影測定に近づく．

この測定の運動量に対する反作用を見てみよう．測定過程における運動量演算子の変化

を，反作用演算子

$$\hat{D}_p := \hat{p}(\tau) - \hat{p} = -\hat{P} \tag{2.128}$$

で特徴づける．$|\psi_\mathrm{P}\rangle$ が

$$\langle \psi_\mathrm{P}|\hat{P}|\psi_\mathrm{P}\rangle = 0 \tag{2.129}$$

を満たしていれば，この反作用は不偏性条件 (2.64) を満たす．以下これを仮定する．このとき

$$\langle \hat{D}_p^2 \rangle = \langle \psi_\mathrm{P}|\hat{P}^2|\psi_\mathrm{P}\rangle \tag{2.130}$$

となる．すなわち，プローブの運動量の分散が，$\hat{p}$ に対する反作用の大きさを決める．このとき，誤差と反作用の不確定性関係は，プローブに対するケナード・ロバートソンの不等式の直接の帰結として

$$\langle \hat{N}_x^2 \rangle \langle \hat{D}_p^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4} \tag{2.131}$$

となる．プローブが $\hat{X}$ と $\hat{P}$ の量子ゆらぎに関して最小不確定性状態にあれば，等号が成立する．ケナード・ロバートソンの不等式がシステムの性質そのもの（すなわち，システム固有の量子ゆらぎ）を記述しているのに対して，ここで議論した誤差と反作用に関する不確定性関係は，プローブの量子ゆらぎ ($\langle \Delta\hat{X}^2\rangle\langle\Delta\hat{P}^2\rangle \geq \hbar^2/4$) が測定過程を通じてシステムに影響した効果（すなわち，測定の反作用）を表すことに注意しよう．

次にこの同じモデルで，$\hat{x}$ と $\hat{p}$ の同時測定を考える．$[\hat{X}(\tau), \hat{p}(\tau)] = 0$ なので $\hat{X}(\tau)$ と $\hat{p}(\tau)$ を同時に射影測定することができ，それぞれの測定結果から $\hat{x}$ と $\hat{p}$ についての情報を得ることができる．前述の (2.125) と (2.129) が成り立てば，これらの測定は不偏性条件を満たし，

$$\langle \hat{X}(\tau) \rangle = \langle \hat{x} \rangle,\ \langle \hat{p}(\tau) \rangle = \langle \hat{p} \rangle \tag{2.132}$$

が成立する．$\hat{p}$ のノイズ演算子は，反作用演算子と同じで

$$\hat{N}_p := \hat{p}(\tau) - \hat{p} = -\hat{P} = \hat{D}_p \tag{2.133}$$

となる．したがって，アーサー・ケリー・グッドマン不等式 (2.96) も，プローブに対するケナード・ロバートソンの不等式の直接の帰結として

$$\langle \hat{N}_x^2 \rangle \langle \hat{N}_p^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4} \tag{2.134}$$

となる．

最後に，不偏性条件を満たさない同時測定について考える．一般の時刻 t においても $[\hat{X}(t), \hat{p}(t)] = 0$ なので，$\hat{X}(t)$ と $\hat{p}(t)$ を同時に射影測定することで，$\hat{x}$ と $\hat{p}$ についての情報を得ることを考える．ただしこの場合は，(2.125) と (2.129) が成り立っていても，

$$\langle \hat{X}(\tau) \rangle = \alpha t \langle \hat{x} \rangle,\ \langle \hat{p}(\tau) \rangle = \langle \hat{p} \rangle \tag{2.135}$$

となるので，$t \neq \tau$（すなわち $\alpha t \neq 1$）ならば，$\hat{x}$ については不偏性条件が満たされない．ここで誤差演算子を

$$\hat{N}_x := \hat{X}(t) - \hat{x} = \hat{X} + (\alpha t - 1)\hat{x},\ \hat{N}_p := \hat{p}(t) - \hat{p} = -\alpha t \hat{P} \tag{2.136}$$

と定義すると，

$$\langle \hat{N}_x^2 \rangle = \langle \hat{X}^2 \rangle + (1-\alpha t)^2 \langle \hat{x}^2 \rangle,\ \langle \hat{N}_p^2 \rangle = (\alpha t)^2 \langle \hat{P}^2 \rangle \tag{2.137}$$

となる．したがって，適当な $0 < \alpha t < 1$ および初期状態に対して

$$\langle \hat{N}_x^2 \rangle \langle \hat{N}_p^2 \rangle < \frac{\hbar^2}{4} \tag{2.138}$$

となる場合があることが確かめられる．このように，不偏性条件が成り立たない場合は，アーサー・ケリー・グッドマン不等式 (2.96) はそのままでは成立しない．しかしこの場合でも，2.3.3 節で議論したように，適切な規格化によって入力等価雑音を考えれば，アーサー・ケリー・グッドマン不等式 (2.96) が成立する．いまの場合は，$\hat{x}$ の測定に対応する物理量 $\hat{X}(t)$ を規格化した

$$\frac{\hat{X}(t)}{\alpha t} = \hat{x} + \frac{\hat{X}}{\alpha t} \tag{2.139}$$

に取り換えれば，不偏性条件が成立する：

$$\left\langle \frac{\hat{X}(t)}{\alpha t} \right\rangle = \langle \hat{x} \rangle. \tag{2.140}$$

このとき，入力等価雑音に対応する演算子

$$\hat{N}_x' := \frac{\hat{X}(t)}{\alpha t} - \hat{x} = \frac{\hat{X}}{\alpha t} \tag{2.141}$$

を定義すると，

$$\langle \hat{N}_x'^2 \rangle \langle \hat{N}_p^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4} \tag{2.142}$$

が成り立つことが分かる．

2.4.2 電磁場のホモダイン測定

次に，電磁場の直交位相振幅を測定するための**ホモダイン測定**（**homodyne measurement**）を考えよう．被測定系は単一モードの電磁場で，これをシグナル光と呼ぶ．プローブも同様に単一モードの電磁場であるとする（これはしばしば局部発信器あるいはまたは**ローカルオシレーター**と呼ばれる）．同じ単一モードであっても，シグナル光はスクイズド状態など様々な状態の光が入力されるが，ローカルオシレーターはレーザー光をそのまま入力するのでコヒーレント状態とみなせる．

シグナル光の消滅演算子を $\hat{a}$，プローブ光の消滅演算子を $\hat{B}$ とする．それらは交換関係

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1,\ [\hat{B}, \hat{B}^\dagger] = 1 \tag{2.143}$$

を満たす．また，プローブの初期状態は，**コヒーレント状態**

$$|\beta\rangle := e^{-|\beta|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{2.144}$$

とする（詳細は A.1.2 節を参照）．ここで $\beta := |\beta| e^{\mathrm{i}\theta}$ であり，$|n\rangle$ は光子数 n のフォック状態である．また，シグナル光の初期状態は，任意の純粋状態 $|\psi\rangle$ とする（混合状態への一般化は容易である）．全系の初期状態を $|\Psi\rangle := |\psi\rangle|\beta\rangle$ とする．また，電磁場の直交位相

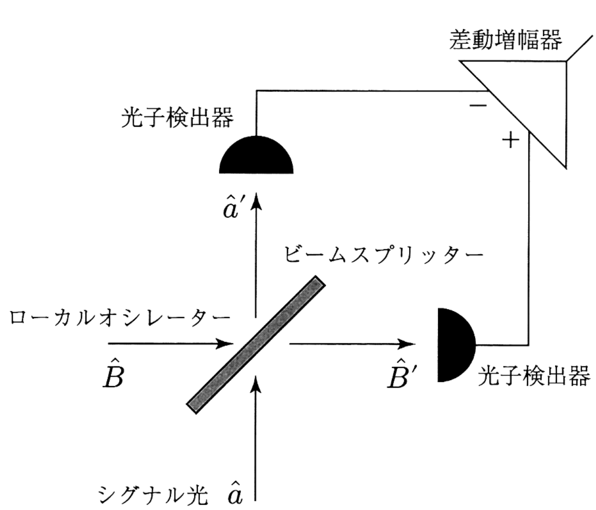


図 2.3　ホモダイン測定の模式図．ビームスプリッターで，測定したいシグナル光を，ローカルオシレーターと呼ばれるコヒーレントな光と混合する．混合された光は二つの光子検出器で測定され，出力の電気信号が差動増幅器に入力される．ここで二つの入力信号の差分がとられ，それを一定の割合で増幅したものが $\hat{R}$ として出力される．(2.148) は増幅率が 1 の場合である．

振幅を

$$\hat{x} := \frac{\hat{a}+\hat{a}^\dagger}{2},\ \hat{p} := \frac{\hat{a}-\hat{a}^\dagger}{2\mathrm{i}},\ \hat{X} := \frac{\hat{B}+\hat{B}^\dagger}{2},\ \hat{P} := \frac{\hat{B}-\hat{B}^\dagger}{2\mathrm{i}} \tag{2.145}$$

と定義する．直交位相振幅は，電場の振幅の正弦成分と余弦成分を適当に規格化したものに相当する（付録 A.1 も参照）．ここで直交位相とは，(2.145) の各項を古典的な量と考えて $\hat{a}$ を $Ae^{i\phi}$ で置き換えると，$x = A\cos\phi, p = A\sin\phi$ のように位相がちょうど 90 度ずれて（「直交」して）いることに由来している．これらは交換関係

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \frac{\mathrm{i}}{2},\ [\hat{X}, \hat{P}] = \frac{\mathrm{i}}{2} \tag{2.146}$$

を満たす．これから述べる量子測定の目的は，シグナル光の直交位相振幅を測定することである．

図 2.3 にホモダイン測定の模式図を示す．まず，シグナル光とプローブ光が，ビームスプリッターで半分ずつに分けて混ぜられる．ビームスプリッターを通過した二つの出力光の，ハイゼンベルク表示での消滅演算子 $\hat{a}'$ と $\hat{B}'$ は

$$\hat{a}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} - \hat{B}),\ \hat{B}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{B}) \tag{2.147}$$

となる*14)．そして，二つの出力光の強度（光子数）をそれぞれ測定し，その差をとる:

*14)　システム光とプローブ光の周波数を Ω とすると，ハイゼンベルク表示の $\hat{a}$ と $\hat{B}$ には位相因子 $e^{-\mathrm{i}\Omega t}$ が付く．しかしこれは以下の結果に本質的な影響を与えないので，簡単のために無視する．

$$\hat{R} := \hat{B}'^\dagger \hat{B}' - \hat{a}'^\dagger \hat{a}'. \tag{2.148}$$

これが最終的に差動増幅器から出力される物理量に対応する演算子である（図 2.3 参照）．これを変形すると

$$\hat{R} = \hat{a}^\dagger \hat{B} + \hat{a}\hat{B}^\dagger = 2(\hat{x}\hat{X} + \hat{p}\hat{P}) \tag{2.149}$$

となる．この期待値を計算すると

$$\begin{aligned}\langle\Psi|\hat{R}|\Psi\rangle &= \langle\psi|\langle\beta|2(\hat{x}\hat{X} + \hat{p}\hat{P})|\psi\rangle|\beta\rangle \\ &= \langle\psi|\left(\hat{x}(\beta+\beta^*) - \mathrm{i}\hat{p}(\beta-\beta^*)\right)|\psi\rangle \\ &= 2|\beta|\langle\psi|(\hat{x}\cos\theta + \hat{p}\sin\theta)|\psi\rangle\end{aligned} \tag{2.150}$$

が得られる．ここで，θ 方向の直交位相振幅

$$\hat{x}_\theta := \hat{x}\cos\theta + \hat{p}\sin\theta \tag{2.151}$$

を定義すると，

$$\langle\Psi|\hat{R}|\Psi\rangle = 2|\beta|\langle\psi|\hat{x}_\theta|\psi\rangle \tag{2.152}$$

となる．すなわち，$\hat{R}$ の測定から，$\hat{x}_\theta$ の期待値を知ることができる．プローブ光の位相 θ を変えると，測定できる直交位相振幅の方向も変化する．

ここで $\hat{R}$ を規格化して

$$\hat{R}' := \frac{\hat{R}}{2|\beta|} = \frac{\hat{x}\hat{X} + \hat{p}\hat{P}}{|\beta|} \tag{2.153}$$

とおくと，シグナル光の任意の状態 $|\psi\rangle$ に対して，

$$\langle\Psi|\hat{R}'|\Psi\rangle = \langle\psi|\hat{x}_\theta|\psi\rangle \tag{2.154}$$

が成り立つ．すなわち，不偏性条件 (2.64) が満たされる．このときの測定誤差の大きさは

$$\langle\Psi|(\hat{R}' - \hat{x}_\theta)^2|\Psi\rangle = \frac{\langle\psi|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\psi\rangle}{4|\beta|^2} = \frac{\langle\psi|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\psi\rangle}{4\langle\beta|\hat{B}^\dagger\hat{B}|\beta\rangle} \tag{2.155}$$

となる．したがって，プローブの光子数 $\langle\beta|\hat{B}^\dagger\hat{B}|\beta\rangle$ がシグナルの光子数 $\langle\psi|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\psi\rangle$ に比べて大きい極限で，測定誤差の大きさはゼロに収束する．すなわち，プローブ光が強い極限で，測定は誤差のない測定に近づく．

2.4.3 電磁場のヘテロダイン測定

次に，ホモダイン測定の設定を少しだけ変えて，シグナル光の二つの直交位相振幅を同時に測定する**ヘテロダイン測定**（**heterodyne measurement**）を考える．これは，異なる（hetero な）周波数のシグナルとプローブを混合することによって，それらの和と差の周波数をもった信号を発生させ，それらを利用して二つの直交位相振幅を同時に測定する方法である．いま，シグナル光の周波数とプローブ光の周波数を，それぞれ $\Omega+\omega$ と Ω とする．両者の周波数が同じ場合（$\omega = 0$）がホモダイン測定である．

図 2.4 にヘテロダイン測定の模式図を示す．シグナル光とプローブ光の周波数が異なっている場合，シグナル光とプローブ光の他に，周波数 $\Omega - \omega$ のイメージバンドと

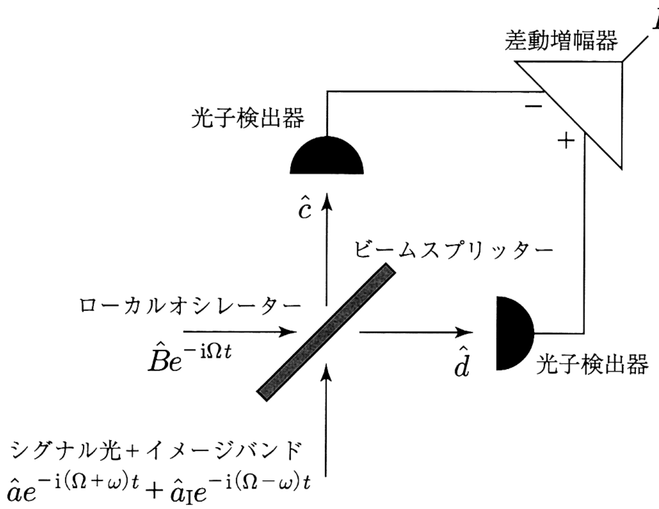


図 2.4　ヘテロダイン測定の模式図．シグナル光が，ローカルオシレーターおよびイメージバンドと混合される．その出力を周波数成分ごとに測定することで，二つの直交位相振幅を同時に測定することができる．

呼ばれるモードが現れる．シグナル，イメージバンド，プローブの消滅演算子を，それぞれ $\hat{a}=\hat{x}+\mathrm{i}\hat{p}$，$\hat{a}_{\mathrm{I}}=\hat{x}_{\mathrm{I}}+\mathrm{i}\hat{p}_{\mathrm{I}}$，$\hat{B}=\hat{X}+\mathrm{i}\hat{P}$ とする．また，シグナルの初期状態を $|\psi\rangle$ とする．イメージバンドの初期状態は真空であり，それを $|\psi_{\mathrm{I}}\rangle$ と書く（すなわち，$\hat{a}_{\mathrm{I}}|\psi_{\mathrm{I}}\rangle=0$）．また，プローブの初期状態は振幅が $\beta=|\beta|e^{\mathrm{i}\theta}$ のコヒーレント状態 $|\beta\rangle$ とする．全系の初期状態は $|\Psi\rangle:=|\psi\rangle|\psi_{\mathrm{I}}\rangle|\beta\rangle$ となる．それぞれの消滅演算子は，ハイゼンベルク表示で $\hat{a}e^{-\mathrm{i}(\Omega+\omega)t}$，$\hat{a}_{\mathrm{I}}e^{-\mathrm{i}(\Omega-\omega)t}$，$\hat{B}e^{-\mathrm{i}\Omega t}$ と時間発展する．ビームスプリッターは $\hat{a}e^{-\mathrm{i}(\Omega+\omega)t}+\hat{a}_{\mathrm{I}}e^{-\mathrm{i}(\Omega-\omega)t}$ と $\hat{B}e^{-\mathrm{i}\Omega t}$ を半分ずつ混合するので，二つの出力モードはハイゼンベルク表示で

$$\begin{aligned}\hat{c}&:=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}e^{-\mathrm{i}(\Omega+\omega)t}+\hat{a}_{\mathrm{I}}e^{-\mathrm{i}(\Omega-\omega)t}-\hat{B}e^{-\mathrm{i}\Omega t})\\ \hat{d}&:=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}e^{-\mathrm{i}(\Omega+\omega)t}+\hat{a}_{\mathrm{I}}e^{-\mathrm{i}(\Omega-\omega)t}+\hat{B}e^{-\mathrm{i}\Omega t})\end{aligned}\tag{2.156}$$

となる．それぞれの強度（光子数）を測定して差をとると，

$$\hat{R}:=\hat{d}^{\dagger}\hat{d}-\hat{c}^{\dagger}\hat{c}=(\hat{a}^{\dagger}\hat{B}+\hat{B}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{I}})e^{\mathrm{i}\omega t}+(\hat{a}_{\mathrm{I}}^{\dagger}\hat{B}-\hat{B}^{\dagger}\hat{a})e^{-\mathrm{i}\omega t}\tag{2.157}$$

となり，ω と $-\omega$ の二つのモードが現れることが分かる*15)．このうち ω の周波数成分だけを取り出すと

$$\hat{a}^{\dagger}\hat{B}+\hat{B}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{I}}=[(\hat{x}+\hat{x}_{\mathrm{I}})\hat{X}+(\hat{p}+\hat{p}_{\mathrm{I}})\hat{P}]-\mathrm{i}[(\hat{p}-\hat{p}_{\mathrm{I}})\hat{X}+(-\hat{x}+\hat{x}_{\mathrm{I}})\hat{P}]\tag{2.158}$$

となる．この実部と虚部をプローブの振幅で規格化したものをそれぞれ

*15)　このように，$\pm\omega$ の周波数成分には必ずイメージバンドの周波数成分が入ってくる．量子系の場合は，たとえイメージバンドが真空であっても，そのゆらぎ（真空雑音）を無視することができない．これがイメージバンドを考える必要がある理由である．

$$\hat{R}_x := \frac{1}{|\beta|}[(\hat{x}+\hat{x}_\mathrm{I})\hat{X}+(\hat{p}+\hat{p}_\mathrm{I})\hat{P}]$$
$$\hat{R}_p := \frac{1}{|\beta|}[(\hat{p}-\hat{p}_\mathrm{I})\hat{X}+(-\hat{x}+\hat{x}_\mathrm{I})\hat{P}] \tag{2.159}$$

と定義する．また θ 方向の直交位相振幅を

$$\hat{x}_\theta := \hat{x}\cos\theta+\hat{p}\sin\theta$$
$$\hat{p}_\theta := -\hat{x}\sin\theta+\hat{p}\cos\theta \tag{2.160}$$

とおく．これらは交換関係

$$[\hat{x}_\theta,\hat{p}_\theta]=\frac{\mathrm{i}}{2} \tag{2.161}$$

を満たす．このとき，

$$\langle\Psi|\hat{R}_x|\Psi\rangle=\langle\psi|\hat{x}_\theta|\psi\rangle,\ \langle\Psi|\hat{R}_p|\Psi\rangle=\langle\psi|\hat{p}_\theta|\psi\rangle \tag{2.162}$$

が任意の $|\psi\rangle$ に対して成り立つ．すなわち，直交位相振幅の両方に対して，不偏性条件 (2.64) が満たされる．したがって，測定結果 $\hat{R}$ の周波数 ω 成分の実部と虚部を見ることで，$\langle\Psi|\hat{R}_x|\Psi\rangle$ と $\langle\Psi|\hat{R}_p|\Psi\rangle$ を同時に知り，そこから $\langle\psi|\hat{x}_\theta|\psi\rangle$ と $\langle\psi|\hat{p}_\theta|\psi\rangle$ を同時に測定することができる．これがヘテロダイン測定である．

しかしながら，

$$[\hat{R}_x,\hat{R}_p]=\frac{\hat{x}^2+\hat{p}^2-\hat{x}_\mathrm{I}^2-\hat{p}_\mathrm{I}^2}{2|\beta|^2} \tag{2.163}$$

となり，$\hat{R}_x$ と $\hat{R}_p$ は交換しないので，厳密には両者を同時に射影測定することはできない．しかし交換子の期待値は

$$\langle\Psi|[\hat{R}_x,\hat{R}_p]|\Psi\rangle=\frac{\langle\psi|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\psi\rangle}{2|\beta|^2} \tag{2.164}$$

となり，右辺はプローブ光が強い極限でゼロになる．したがってこの極限で，$\hat{R}_x$ と $\hat{R}_p$ は同時に射影測定できると考えられる．

さて，ヘテロダイン測定の測定誤差を評価するために，誤差演算子を

$$\hat{N}_x := \hat{R}_x-\hat{x}_\theta,\ \hat{N}_p := \hat{R}_p-\hat{p}_\theta \tag{2.165}$$

とおくと，

$$\langle\hat{N}_x^2\rangle=\langle\hat{N}_p^2\rangle=\frac{1}{4}+\frac{\langle\psi|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\psi\rangle}{4|\beta|^2} \tag{2.166}$$

となる．これはプローブ光の強い極限で

$$\langle\hat{N}_x^2\rangle=\langle\hat{N}_p^2\rangle=\frac{1}{4} \tag{2.167}$$

となり，

$$\langle\hat{N}_x^2\rangle\langle\hat{N}_p^2\rangle=\frac{1}{16} \tag{2.168}$$

を満たす．$|\langle\Psi|[\hat{x}_\theta,\hat{p}_\theta]|\Psi\rangle|=1/2$ なので，(2.168) は，アーサー・ケリー・グッドマンの不確定性関係 (2.96) の等号を達成していることが分かる．

同じ問題を次のように考えることもできる．プローブ光が十分強い極限では，そのゆ

らぎは無視できるので，プローブ光の消滅演算子 $\hat{B}$ をスカラー β に置き換える．それに伴って，$\hat{X}$ は $|\beta|\cos\theta$，$\hat{P}$ は $|\beta|\sin\theta$ で置き換えられる．すると (2.159) は

$$\begin{aligned}\hat{R}'_x &:= (\hat{x}+\hat{x}_{\mathrm{I}})\cos\theta + (\hat{p}+\hat{p}_{\mathrm{I}})\sin\theta \\ \hat{R}'_p &:= (\hat{p}-\hat{p}_{\mathrm{I}})\cos\theta + (-\hat{x}+\hat{x}_{\mathrm{I}})\sin\theta\end{aligned} \tag{2.169}$$

となり，これらは交換する:

$$[\hat{R}'_x, \hat{R}'_p] = 0. \tag{2.170}$$

なお，$\theta = 0$ とすると，この測定モデルは 2.4.1 節で議論したフォンノイマンの測定モデルと一致している．誤差演算子を

$$\hat{N}'_x := \hat{R}'_x - \hat{x}_\theta,\ \hat{N}'_p := \hat{R}'_p - \hat{p}_\theta \tag{2.171}$$

とおくと，

$$\langle \hat{N}'^2_x \rangle = \langle \hat{N}'^2_p \rangle = \frac{1}{4} \tag{2.172}$$

となり，再び，アーサー・ケリー・グッドマンの意味で最小不確定性関係を満足していることが分かる．

ホモダイン測定は直交位相振幅の一方だけを測るので，その結果得られる不確定性関係はケナード・ロバートソンの不確定性関係に対応し，シグナル光だけのゆらぎが測定できる．これに対して，二つの直交位相振幅を同時に測るヘテロダイン測定の場合は，イメージバンドの真空雑音に起因するゆらぎが付加される．これは，不偏性の条件の下で同時測定をすることの避けられない代償である．

2.4.4 スピンの QND 測定

システムとプローブの両方がスピン演算子で記述される場合を考える．システムの演算子を $(\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$，プローブの演算子を $(\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$，システムのスピンの大きさを S，プローブのスピンの大きさを J とする．これらは交換関係

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = \mathrm{i}\sum_k \varepsilon_{ijk}\hat{S}_k,\ [\hat{J}_i, \hat{J}_j] = \mathrm{i}\sum_k \varepsilon_{ijk}\hat{J}_k \tag{2.173}$$

を満たす．これから考える量子測定の目的は，システムの $\hat{S}_z$ を QND 測定することである．そのためにシステムとプローブを相互作用させ，プローブの $\hat{J}_x$ を射影測定する．

簡単のために，システムとプローブの自由ハミルトニアンは無視して，両者の相互作用ハミルトニアンを

$$\hat{H}_{\mathrm{int}} := \hbar\alpha\hat{S}_z\hat{J}_z \tag{2.174}$$

とする．ここで α は相互作用の強さを特徴づけるパラメータである．ハイゼンベルク表示で考えると，ハイゼンベルク方程式は

$$\frac{d\hat{S}_z(t)}{dt} = 0,\ \frac{d\hat{J}_x(t)}{dt} = -\alpha\hat{S}_z(t)\hat{J}_y(t),\ \frac{d\hat{J}_y(t)}{dt} = \alpha\hat{S}_z(t)\hat{J}_x(t) \tag{2.175}$$

なので，これを $\hat{S}_z(0) = \hat{S}_z$，$\hat{J}_x(0) = \hat{J}_x$，$\hat{J}_y(0) = \hat{J}_y$ という条件のもとで解くと

$$\hat{S}_z(t) = \hat{S}_z \tag{2.176}$$

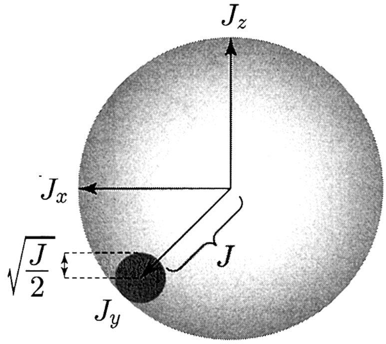


図 2.5　y 方向のスピンコヒーレント状態の模式図．y 方向に垂直な x, z 方向の量子ゆらぎの大きさは $\sqrt{J/2}$ で等方的に分布している．

$$\hat{J}_x(t) = \hat{J}_x \cos(\alpha t \hat{S}_z) - \hat{J}_y \sin(\alpha t \hat{S}_z) \simeq \hat{J}_x - \alpha t \hat{J}_y \hat{S}_z \tag{2.177}$$

を得る．ここで αt は小さいとして，その一次までをとる近似をした．なお，(2.176) は QND 条件に他ならない．

さて，プローブの初期状態 $|\psi_\mathrm{P}\rangle$ を，$\hat{J}_y$ の最大固有値 J の固有状態とする: $\hat{J}_y|\psi_\mathrm{P}\rangle = J|\psi_\mathrm{P}\rangle$．この状態は**スピンコヒーレント状態**と呼ばれ，$\langle\psi_\mathrm{P}|\hat{J}_x|\psi_\mathrm{P}\rangle = \langle\psi_\mathrm{P}|\hat{J}_z|\psi_\mathrm{P}\rangle = 0$, $\langle\psi_\mathrm{P}|\hat{J}_x^2|\psi_\mathrm{P}\rangle = \langle\psi_\mathrm{P}|\hat{J}_z^2|\psi_\mathrm{P}\rangle = J/2$ を満たす．すなわちスピンコヒーレント状態は，$\hat{J}_x$ と $\hat{J}_z$ について，ケナード・ロバートソン不等式 (2.86) の下限を達成する最小不確定性状態である．図 2.5 にスピンコヒーレント状態の模式図を示す．

全系の初期状態を $|\Psi\rangle := |\psi\rangle|\psi_\mathrm{P}\rangle$ とすると，

$$\langle\Psi|\hat{J}_x(t)|\Psi\rangle = -\alpha t J \langle\psi|\hat{S}_z|\psi\rangle \tag{2.178}$$

となり，$\hat{J}_x(t)$ の測定から $\hat{S}_z$ の期待値が分かる．ここで $\hat{J}_x(t)$ を規格化して

$$\hat{R}(t) := -\frac{\hat{J}_x(t)}{\alpha t J} = -\frac{\hat{J}_x}{\alpha t J} + \frac{\hat{J}_y \hat{S}_z}{J} \tag{2.179}$$

とおくと，システムの任意の状態 $|\psi\rangle$ に対して

$$\langle\Psi|\hat{R}(t)|\Psi\rangle = \langle\psi|\hat{S}_z|\psi\rangle \tag{2.180}$$

が成立する．すなわち不偏性条件 (2.64) が満たされる．このときの測定誤差の大きさは

$$\langle\Psi|(\hat{R}(t) - \hat{S}_z)^2|\Psi\rangle = \frac{1}{2(\alpha t)^2 J} \tag{2.181}$$

となる．これは，J が十分大きい極限で，ゼロに近づく．すなわち，プローブのスピンが十分大きい極限で，測定は誤差がない測定に近づく．

この QND 測定の仕組みを直感的に考えよう．図 2.6 に，プローブのスピンの模式図を示す．初期状態は y 方向のスピンコヒーレント状態である．相互作用によって，$\hat{S}_z$ の固有値の大きさに比例して角度 $\alpha t S_z$ だけプローブが反時計回りに回転する．この角度が小さければ，$\sin(\alpha t S_z) \simeq \alpha t S_z$ によって，$\hat{J}_x$ を測定することでどれだけ回転したかが分かる．プローブのスピンの大きさが J でゆらぎが $\sqrt{J}$ なので，J が大きくなるほど回転前

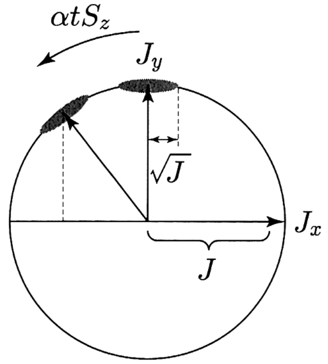


図 2.6　スピン QND 測定の模式図．プローブのスピンがシステムのスピンの状態に応じて回転する．この回転角を $\hat{J}_x$ の測定を通じて知ることで，システムのスピンについての情報を読み出す．

後の状態の重なりが小さくなり，$\alpha t S_z$ を正確に知ることができるようになる．すなわち，$\hat{S}_z$ の射影測定に近づく．

このような仕組みは，スピン以外の多くの QND 測定において共通である．たとえば，プローブが単一モードの光の場合は，スピンコヒーレント状態の代わりに，直交位相振幅の y 方向に大きな振幅をもったコヒーレント光を初期状態にとる．そして，被測定系の状態に応じてコヒーレント光を回転させ，$\hat{J}_x$ の代わりに直交位相振幅 $\hat{x}$ を測定すればよい．この場合も，コヒーレント光が強い極限で，測定は射影測定に近づく．

次に，実際の実験で上記のスピン QND 測定を実現する方法を紹介する．システムは原子集団のスピンである．プローブは電磁場（レーザー）の偏光自由度であるが，以下のようにしてそれをスピンと等価に扱うことができる．電磁場の x 偏光と y 偏光の消滅演算子をそれぞれ $\hat{a}_x$，$\hat{a}_y$ として，円偏光の消滅演算子を

$$\hat{a}_+ := \frac{\hat{a}_x + \mathrm{i}\hat{a}_y}{\sqrt{2}},\ \hat{a}_- := \frac{\hat{a}_x - \mathrm{i}\hat{a}_y}{\sqrt{2}} \tag{2.182}$$

とする．これらは正準交換関係

$$[\hat{a}_+, \hat{a}_+^\dagger] = 1,\ [\hat{a}_-, \hat{a}_-^\dagger] = 1,\ [\hat{a}_+, \hat{a}_-] = 0 \tag{2.183}$$

を満たす．ここで，光子の生成消滅演算子を用いて，次のような**シュウィンガー演算子 (Schwinger operators)** を導入する:

$$\hat{J}_x := \frac{\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_- + \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+}{2},\ \hat{J}_y := \frac{\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_- - \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+}{2\mathrm{i}},\ \hat{J}_z := \frac{\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ - \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_-}{2}. \tag{2.184}$$

これらが，角運動量の交換関係 $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = \sum_k \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k$ を満足することは，生成消滅演算子の交換関係を用いて直接確かめることができる．なお，$\hat{N}_J := (\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ + \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_-)/2$ とおくと $[\hat{N}_J, \hat{J}_i] = 0$ である．また，$\hat{J}^2 := \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2 = \hat{N}_J(\hat{N}_J + 1)$ が成り立つ．$\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$ は光の偏光を特徴づけるストークスパラメータの演算子版とみなすことができる．

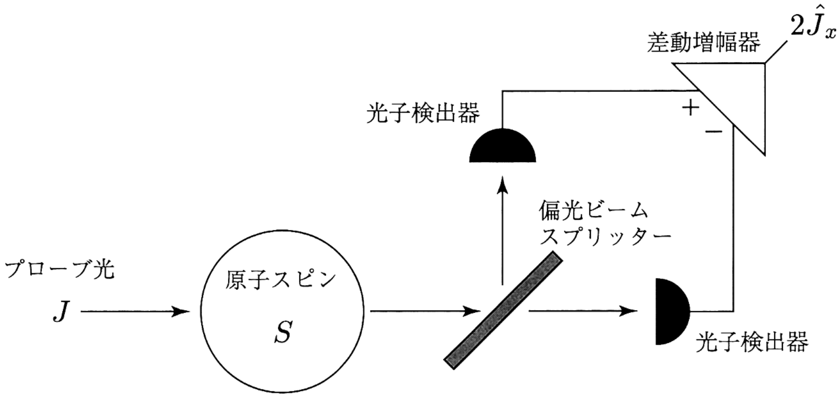


図 2.7　ストークス回転を用いたスピン QND 測定の実験の模式図．直線偏光したプローブ光は原子集団を通過する際に，ファラデー回転によって偏光面が回転する．その回転角を測定することで，原子のスピンの $\hat{S}_z$ 成分を非破壊測定することができる．

A.2.2 節で議論するように，ある種の原子のスピンは，プローブ光と (2.174) の形の相互作用をすることが知られている．これは，原子集団を通過する光の偏光方向が原子集団のスピンに比例した角度だけ回転する**ファラデー回転**（**Faraday rotation**）を誘起する相互作用である．この相互作用の後，プローブ光を偏光ビームスプリッターに通す（図 2.7 を参照）．これは，プローブ光を直線偏光成分ごとに分けて，二つのモードで出力する．二つの出力光の強度（光子数）は $\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x$ と $\hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y$ である．これらを測定してその差をとると，

$$\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x - \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y = \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_- + \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+ = 2\hat{J}_x \tag{2.185}$$

となる．このようにして $\hat{J}_x$ が測定できることが分かる[*16)]．

2.4.5　光子数の QND 測定

次に，完全なキャビティ内に閉じ込められた光子数を，二準位原子をプローブとして QND 測定する方法を紹介しよう（キャビティや二準位原子については，B.2 節を参照）．これは，図 2.8 に示すような**ラムゼー干渉計**（**Ramsey interferometer**）によって実現できる[*17)]．図 2.8 において，被測定系である光子は中央のマイクロ波キャビティに閉じ込められている．また，プローブ原子は，左右にある二つのキャビティで古典光と相互作用する．この左右のキャビティはラムゼーキャビティと呼ばれる．

二準位原子は左端の原子箱で準備され，初期状態は励起状態 $|1\rangle$（パウリ演算子 $\hat{\sigma}_z$ の $+1$ 固有状態）とする．原子箱から打ち出された原子は，まず左側のラムゼーキャビティを通過する．このキャビティ内の電磁場は古典場として扱ってよいとする．このとき，原子の状態は回転し，$(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$（すなわち，$\hat{\sigma}_x$ の $+1$ の固有状態）になる．

*16)　このようなスピン QND 測定は，[45] で理論的に提案され，[46] などで実験的に実現された．

*17)　このような実験方法は [47] で理論的に提案された．それを実現した実験（[48] など）は，Serge Haroche の 2012 年ノーベル物理学賞の受賞理由の一つになった．ここでは実際の実験をやや単純化した方法を紹介する．

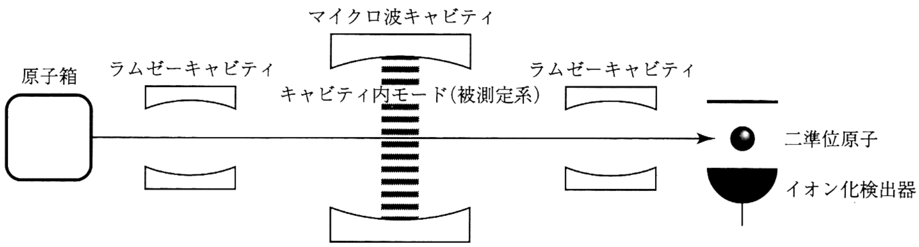


図 2.8　ラムゼー干渉計の模式図．原子箱からプローブである二準位原子が打ち出され，左のラムゼーキャビティで回転したあと，中央のマイクロ波キャビティ内の光子と相互作用する．次に右のラムゼーキャビティでさらに回転し，最後にイオン化検出器でどちらの準位にあるのか測定される．このような測定を何回も繰り返すことで，マイクロ波キャビティ内の光子数を非破壊測定することができる．

次に原子はマイクロ波キャビティを通過し，そのときにキャビティ内の電磁場と相互作用する．ここではキャビティ内の電磁場は量子化されているとする．ここで原子とマイクロ波キャビティの離調が十分大きいとして，相互作用ハミルトニアンが

$$\hat{H}_{\text{int}} = \alpha\hat{n}\hat{\sigma}_z \tag{2.186}$$

となっているとする（詳細は A.2.2 節を参照）．ここで α は定数，$\hat{n}$ はキャビティ内の光子数演算子である．この相互作用ハミルトニアンは光子数 QND の条件 (2.81) を満たしている．キャビティ内の光子の状態が光子数 n の固有状態とすると，相互作用後の原子の状態は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{\mathrm{i}\varphi_n}|0\rangle + |1\rangle) \tag{2.187}$$

となる．ここで $\varphi_n := 2n\alpha\tau/\hbar$ で，τ は相互作用の時間である（たとえば，$\varphi_n = n\pi/16$ となるようにする）．なお (2.187) は

$$\frac{(e^{\mathrm{i}\varphi_n}+1)(|0\rangle + |1\rangle)}{2\sqrt{2}} + \frac{(-e^{\mathrm{i}\varphi_n}+1)(-|0\rangle + |1\rangle)}{2\sqrt{2}} \tag{2.188}$$

とも書ける．

さて，原子はマイクロ波キャビティを出た後，右側のラムゼーキャビティを通過する．ここではキャビティ内の電磁場は古典場として扱う．原子が（一つ目のラムゼーキャビティのときとは逆方向に）回転するようにしておくと，ラムゼーキャビティを出た後の原子の状態は

$$\frac{e^{\mathrm{i}\varphi_n}+1}{2}|1\rangle + \frac{-e^{\mathrm{i}\varphi_n}+1}{2}|0\rangle \tag{2.189}$$

となる．最後に，右端のイオン化検出器で原子の状態を $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 基底で誤差なく測定する．このとき，0 と 1 を得る確率は，それぞれ

$$p(0) = \left|\frac{-e^{\mathrm{i}\varphi_n}+1}{2}\right|^2 = \sin^2\frac{\varphi_n}{2},\quad p(1) = \left|\frac{e^{\mathrm{i}\varphi_n}+1}{2}\right|^2 = \cos^2\frac{\varphi_n}{2} \tag{2.190}$$

となる．φ_n は n に比例していたので，測定結果の確率分布は光子数に依存して変化することが分かる．なお，以上の原子の状態の変化を，図 2.9 に模式的に示した．

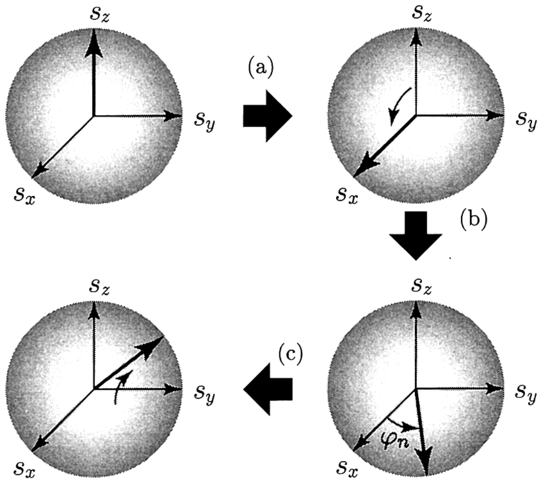


図 2.9　原子の回転のブロッホ球による表示．(a) 左のラムゼーキャビティでの回転．(b) 中央のマイクロ波キャビティでの回転．キャビティ内の光子との相互作用によって，光子数に比例した角度 φ_n だけ回転する．(c) 右のラムゼーキャビティでの回転．

この測定のクラウス演算子と POVM を計算することができる．光子の初期状態が $|\psi\rangle := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n |n\rangle$ という重ね合わせ状態だとする（$|n\rangle$ は光子数 n の固有状態）．このとき，原子を測定する直前の全系の状態は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-e^{\mathrm{i}\varphi_n}+1}{2} \alpha_n |n\rangle|0\rangle + \frac{e^{\mathrm{i}\varphi_n}+1}{2} \alpha_n |n\rangle|1\rangle \right) \tag{2.191}$$

と書ける．したがって，クラウス演算子を $\hat{M}_0$，$\hat{M}_1$ とすると

$$\hat{M}_0|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-e^{\mathrm{i}\varphi_n}+1}{2} \alpha_n |n\rangle, \ \hat{M}_1|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{i}\varphi_n}+1}{2} \alpha_n |n\rangle \tag{2.192}$$

となる．したがって

$$\hat{M}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-e^{\mathrm{i}\varphi_n}+1}{2} |n\rangle\langle n|, \ \hat{M}_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{i}\varphi_n}+1}{2} |n\rangle\langle n| \tag{2.193}$$

が得られる．POVM は

$$\hat{E}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sin^2 \frac{\varphi_n}{2} |n\rangle\langle n|, \ \hat{E}_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^2 \frac{\varphi_n}{2} |n\rangle\langle n| \tag{2.194}$$

となる．原子がマイクロ波キャビティを一個通過するたびに，光子の状態はクラウス演算子 (2.192) にしたがって変化する．

なお，一回の測定で得られる情報は少なく，光子の状態の変化も少ない．しかし，原子を何個も順次マイクロ波キャビティを通過させることで，測定は全体として徐々に射影測定に近づいていく．この過程で光子の状態ベクトルが光子数固有状態に徐々に射影されて

いく様子が，実際に実験で観測されている*18)．

2.5 量子状態トモグラフィー

特定の物理量だけでなく量子状態の全体（すなわち，密度演算子の全成分）を知りたいとき，**量子状態トモグラフィー（quantum state tomography）**という手法が有効である．密度演算子 $\hat{\rho}$ で記述される量子系のサンプル数 N が無限大の極限で量子状態トモグラフィーをすれば，密度演算子 $\hat{\rho}$ を完全に知ることができる．

まず最も簡単な例として，ある縮退のない物理量 $\hat{A}$ を射影測定して，どのサンプルからも常に同じ結果 a が得られたとしよう．このとき $\hat{\rho}$ は，$\hat{A}$ の固有値 a の固有状態であると結論できる．これは $\hat{A}$ の測定だけで $\hat{\rho}$ が完全に分かる特殊なケースである．しかし一般には，一つの物理量だけを測定しても密度演算子は完全には分からない．というのも，非可換な物理量を同時測定できないこと（アーサー・ケリー・グッドマンの不確定性関係）から，$\hat{A}$ を射影測定すると $\hat{A}$ と非可換な物理量についての情報が失われてしまうからである．

そのため，密度演算子 $\hat{\rho}$ を完全に知りたければ，サンプルの集団を複数のグループに分け，それぞれに対して別々の物理量を測定する必要がある．十分な数の物理量を測定すれば，最後にそれらに関する測定結果をすべて総合して，$\hat{\rho}$ を完全に推定することができる．それが量子状態トモグラフィーの基本的なアイデアである．

キュービット系の場合

まず簡単な場合として，キュービット系の状態のトモグラフィーを考えよう．キュービット系の密度演算子 $\hat{\rho}$ はブロッホ球表示で (1.90) のように書ける．したがってブロッホベクトル $\overrightarrow{s} = (s_x, s_y, s_z)$ が分かれば，$\hat{\rho}$ が分かることになる．ここでブロッホベクトルの成分とパウリ演算子の期待値の間には (1.94) のような関係がある．したがって，三つのパウリ演算子 $(\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ を射影測定してそれらの期待値を求めれば，ブロッホベクトルすなわち密度演算子が完全に推定できることになる．

一般の有限次元系の場合

この方法は有限次元の密度演算子の場合に一般化することができる．ヒルベルト空間の次元を N $(2 \leq N < \infty)$ とすると，これに作用するエルミート演算子の全体は $d := N^2 - 1$ 次元の実ベクトル空間をなす．このエルミート演算子全体からなる空間の基底は，以下に述べる $\mathrm{SU}(N)$ の生成子であることが知られている．

$\mathrm{SU}(N)$ とは，N 次元ヒルベルト空間に作用する行列式が 1 のユニタリ演算子全体がなす群である．その生成子を $\{\hat{\lambda}_i\}_{i=1}^{d}$ とすると，$\mathrm{SU}(N)$ の任意の元 $\hat{U}$ は，d 次元実ベクトル $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_d)$ を用いて

$$\hat{U} = \exp\left(\mathrm{i}\sum_i \alpha_i \hat{\lambda}_i\right) \tag{2.195}$$

*18) 前述の [48] などを参照．

と書くことができる．とくに $N=2$ の場合は，$\hat{\lambda}_i = \hat{\sigma}_i \ (i=x,y,z)$ となり，SU(2) の生成子はパウリ演算子に他ならない．$\hat{\lambda}_i$ はエルミート演算子であり，

$$\mathrm{tr}[\hat{\lambda}_i] = 0, \quad \mathrm{tr}[\hat{\lambda}_i \hat{\lambda}_j] = \delta_{ij} \tag{2.196}$$

を満たす．また，ある複素数 $h_{ijk}\ (i,j,k=1,2,\cdots,d)$ を用いて

$$\hat{\lambda}_i \hat{\lambda}_j = \delta_{ij} \frac{\hat{I}}{N} + \sum_k h_{ijk} \hat{\lambda}_k \tag{2.197}$$

と書くことができる．ここで $\hat{I}$ は N 次元ヒルベルト空間の単位演算子である．h_{ijk} は以下のような対称性をもつ:

$$h_{ijk} = h_{jik}^*, \quad h_{ijk} = h_{ikj}^*. \tag{2.198}$$

たとえば後者は，

$$h_{ijk} = \mathrm{tr}[\hat{\lambda}_i \hat{\lambda}_j \hat{\lambda}_k] = \mathrm{tr}[\hat{\lambda}_j \hat{\lambda}_k \hat{\lambda}_i] = \mathrm{tr}[\hat{\lambda}_i \hat{\lambda}_k \hat{\lambda}_j]^* = h_{ikj}^* \tag{2.199}$$

のように示せる．

さて，$\{\hat{\lambda}_i\}_{i=1}^d$ を用いて密度演算子 $\hat{\rho}$ を展開すると，

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{I}}{N} + \sum_i \theta_i \hat{\lambda}_i \tag{2.200}$$

となる．ここで，実ベクトル $(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_d)$ は一般化されたブロッホベクトルであり，密度演算子を完全に特徴づけている．このとき，(2.196) より

$$\mathrm{tr}[\hat{\lambda}_i \hat{\rho}] = \theta_i \tag{2.201}$$

が成り立つ．したがって，$\{\hat{\lambda}_i\}_{i=1}^d$ の射影測定をして期待値を求めれば，密度演算子が完全に推定できることになる．

なお，量子状態トモグラフィーは，量子状態推定の一種である．より体系的な量子状態の推定理論については，次章で述べる．

第 3 章
量子状態推定

未知の量子状態を測定する場合，得られた測定結果だけから系の状態を推定することは重要である．本章では，測定結果に基づいて状態を推定するための方法である量子推定とその応用について述べる．まず 3.1 節では準備として古典統計学における推定理論を解説する．3.2 節で量子推定理論を詳しく解説し，その不確定性原理への応用も述べる．

3.1 古典推定理論

本節では，量子推定を議論するための準備として，古典推定理論を簡単に紹介する．

3.1.1 パラメータ推定の考え方

確率的な事象があり，我々はその確率分布を知らないとする．観測結果から確率分布を知るにはどうしたらいいだろうか．これについては色々なアプローチが統計学において知られているが，ここではとくにパラメータ推定と呼ばれる考え方を紹介する．

d 次元の実パラメータ $\theta := (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_d)$ で特徴づけられた確率分布 $p(x|\theta)$ を考える．ここで x は確率変数である．任意の x について，$p(x|\theta)$ は θ で必要なだけ微分可能とする．たとえば，x のとりうる値が 0 と 1（たとえばコインの表と裏に対応）で，0 が出る確率 θ がパラメータのときは

$$p(0|\theta) = \theta, \quad p(1|\theta) = 1 - \theta \tag{3.1}$$

と書ける．また，ガウス分布は期待値 θ_1 と分散 θ_2 で完全に特徴づけられるが，これらが推定すべきパラメータの場合は，$p(x|\theta)$ は

$$p(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}} \exp\left(-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_2}\right) \tag{3.2}$$

と書ける[*1]．

x が離散変数で，とりうる値が $\{1, 2, \cdots, D\}$ の場合を考える．もし確率分布に関する

---

*1) x が連続変数の場合は，厳密には $p(x|\theta)$ は**確率密度**であり，$p(x|\theta)dx$ が微小区間 dx の間の事象が生じる確率を与える．この場合は，以下の議論における確率の和 $\sum_x p(x|\theta)$ は，確率密度の積分 $\int dx p(x|\theta)$ で置き換える必要がある．

仮定や事前知識が何もなければ，$p(1), p(2), \cdots, p(D)$ をすべて推定する必要がある．ただし，$\sum_{x=1}^{D} p(x) = 1$ という拘束条件があるので，$D-1$ 個のパラメータを推定する問題になる．一方で実際には，確率分布の形をあらかじめ限定できる場合が多い．その場合は，確率分布の形を特徴づける少数の，たとえば d 個（$d < D$）のパラメータを推定することになる*2)．

いま，同じ確率分布 $p(x|\theta)$ に従うサンプルが N 個あるとする．以下では簡単のため，これらのサンプルは統計的に独立とする．このようなサンプルは **i.i.d. (independent and identically distributed)** であるという．n 番目のサンプルを測定したときの x の値を x_n と書く．N 個の測定結果はまとめて $X_N := (x_1, x_2, \cdots, x_N)$ と書ける．この確率分布は

$$p(X_N|\theta) := \prod_{n=1}^{N} p(x_n|\theta) \tag{3.3}$$

である．測定結果 X_N をもとに θ の値を推定することが我々の目的である*3)．

もし x のとりうる値が有限個で，さらにサンプル数が無限大 $(N \to \infty)$ ならば，以下のようにして確率分布を正確に知ることができる．ある x について，$x_n = x$ となる n の個数を N_x と書く（$\sum_x N_x = N$）．ここで $q_N(x) := N_x/N$ と定義すると，大数の法則より $\lim_{N\to\infty} q_N(x) = p(x|\theta)$ が任意の x について成立する．すなわち確率分布そのものを正確に知ることができ，したがってパラメータ θ の値も正確に知ることができる*4)．

次に，サンプル数 N が有限のときに θ をどの程度の精度で推定できるかという問題を考える．ある測定結果 X_N から推定した θ の推定値を $\theta^{\mathrm{est}} := (\theta_1^{\mathrm{est}}, \theta_2^{\mathrm{est}}, \cdots, \theta_d^{\mathrm{est}})$ と書く．これが X_N の関数であることを明示するときは $\theta^{\mathrm{est}}(X_N)$ のように書く．θ^{est} の (3.3) に関する期待値は

$$\langle \theta^{\mathrm{est}} \rangle_\theta := \sum_{X_N} p(X_N|\theta) \theta^{\mathrm{est}}(X_N) \tag{3.4}$$

で与えられる．これは，「N 個のサンプルを測定する」ことを一つの試行としたときのアンサンブル平均である．

同じ X_N から得た推定値でも，推定の方法によって精度は色々である．極端な例として，どのような測定結果が得られても $\theta^{\mathrm{est}} = 0$ とするような推定方法は，もとの確率分布についての情報を何も与えてくれない．望ましい推定方法が満たすべき条件として，不偏性条件がある．これは，任意の θ に対して

$$\langle \theta^{\mathrm{est}} \rangle_\theta = \theta \tag{3.5}$$

が成り立つことである．このように，推定値のアンサンブル平均が真のパラメータの値と一致するような推定は，**不偏推定**と呼ばれる．

不偏推定の場合に，**共分散行列** C を，その (i, j) 成分が

---

*2) ガウス分布のように連続変数の確率分布の場合は，あらゆる分布関数の集合は無限次元の空間になる．しかし，たとえ無限次元であっても，確率分布の関数形を（たとえばガウス分布のように）あらかじめ限定できる場合なら，有限個のパラメータを推定する問題に帰着する．

*3) 本章で議論するパラメータ推定においては，θ は確率変数ではないことに注意．

*4) ただし，θ を一意に定めるためには，異なる θ が同じ確率分布 $p(x|\theta)$ を与えることはない，という条件が必要である．

$$C_{ij} := \sum_{X_N} p(X_N|\theta)(\theta_i^{\mathrm{est}}(X_N) - \theta_i)(\theta_j^{\mathrm{est}}(X_N) - \theta_j) \tag{3.6}$$

である行列と定義する．これは推定精度を特徴づける量である．実際，θ_i の推定値の分散は

$$(\Delta\theta_i^{\mathrm{est}})^2 = C_{ii} \tag{3.7}$$

で与えられるが，これが小さいほど良い推定であると考えられる．なお，$(a_1, a_2, \cdots, a_d)$ を実ベクトルとして，$A := \sum_i a_i\theta_i$ の推定を考えることもできる．推定値を $A^{\mathrm{est}} = \sum_i a_i\theta_i^{\mathrm{est}}$ とすると，その分散は

$$(\Delta A^{\mathrm{est}})^2 = \sum_{ij} a_i C_{ij} a_j \tag{3.8}$$

で与えられる．

3.1.2　フィッシャー情報量とクラメール・ラオ不等式

不偏推定の推定精度を特徴づけるために，**フィッシャー情報量**（**Fisher information**）という概念を考えよう．パラメータ θ が d 次元のとき，フィッシャー情報量は $d \times d$ 行列（フィッシャー情報行列）J で与えられ，その (i,j) 成分は

$$\begin{aligned} J_{ij} &:= \sum_x p(x|\theta) \frac{\partial \ln p(x|\theta)}{\partial\theta_i} \frac{\partial \ln p(x|\theta)}{\partial\theta_j} \\ &= \sum_x \frac{1}{p(x|\theta)} \frac{\partial p(x|\theta)}{\partial\theta_i} \frac{\partial p(x|\theta)}{\partial\theta_j} \end{aligned} \tag{3.9}$$

と定義される．これは実対称行列である．以下では，J に逆行列が存在すると仮定する．定義より J は正値なので，J に逆行列があることは J のすべての固有値が正であることと等価である．

フィッシャー情報量の意味は，以下に述べる**クラメール・ラオ不等式**（**Cramér-Rao inequality**）によって明らかになる: サンプル数が N の i.i.d. から θ を推定するとき，任意の不偏推定について

$$C \geq \frac{1}{N} J^{-1} \tag{3.10}$$

が成立する．ここで C は (3.6) で定義される共分散行列である．なお一般に，行列の不等式 $A \geq B$ は，$A - B$ が正値であることを意味する．すなわち，不偏推定の共分散行列は，フィッシャー情報行列の逆行列を N でわったものよりも常に大きい．(3.10) がクラメール・ラオ不等式である．$N \to \infty$ の極限で，右辺はゼロに収束する．(3.10) から，$A^{\mathrm{est}} = \sum_i a_i\theta_i^{\mathrm{est}}$ に対して

$$(\Delta A^{\mathrm{est}})^2 \geq \frac{1}{N} \sum_{ij} a_i (J^{-1})_{ij} a_j \tag{3.11}$$

が成立することが分かる．これもクラメール・ラオ不等式と呼ばれる．とくに，

$$(\Delta\theta_i^{\mathrm{est}})^2 \geq \frac{1}{N} (J^{-1})_{ii}. \tag{3.12}$$

すなわち，フィッシャー情報量の逆数は，不偏推定の精度の上限を与える（推定誤差の下

限は推定精度の上限であることに注意しよう）．言い換えると，フィッシャー情報量は推定の感度を表している．また，クラメール・ラオ不等式は，ある推定精度を達成するために必要なサンプル数の下限を与えているとも言える．実際，(3.11) より

$$N \geq \frac{\sum_{ij} a_i (J^{-1})_{ij} a_j}{(\Delta A^{\mathrm{est}})^2} \tag{3.13}$$

が成り立つ．すなわち，フィッシャー情報量が大きいほど，同じ推定精度を達成するために必要なサンプル数は少なくてすむ．

クラメール・ラオ不等式 (3.10) の証明は以下の通りである．まず $N=1$ のときを示す．不偏性条件

$$\sum_x \theta_i^{\mathrm{est}}(x) p(x|\theta) = \theta_i \tag{3.14}$$

の両辺を θ_j で微分すると

$$\sum_x \theta_i^{\mathrm{est}}(x) \frac{\partial p(x|\theta)}{\partial \theta_j} = \delta_{ij} \tag{3.15}$$

が成り立つ．一方，確率分布の規格化条件

$$\sum_x p(x|\theta) = 1 \tag{3.16}$$

の両辺を θ_j で微分すると

$$\sum_x \frac{\partial p(x|\theta)}{\partial \theta_j} = 0 \tag{3.17}$$

が成り立つ．(3.15) から (3.17) に θ_i をかけたものを引くと

$$\sum_x \left(\theta_i^{\mathrm{est}}(x) - \theta_i\right) \frac{\partial p(x|\theta)}{\partial \theta_j} = \delta_{ij} \tag{3.18}$$

が得られる．したがって，任意の実ベクトル $(a_1, a_2, \cdots, a_d)$ と $(b_1, b_2, \cdots, b_d)$ に対して

$$\sum_x \sum_{ij} a_i \left(\theta_i^{\mathrm{est}}(x) - \theta_i\right) \frac{\partial p(x|\theta)}{\partial \theta_j} b_j = \sum_i a_i b_i \tag{3.19}$$

が成り立つ．これはさらに

$$\sum_x p(x|\theta) \sum_{ij} a_i \left(\theta_i^{\mathrm{est}}(x) - \theta_i\right) \frac{\partial \ln p(x|\theta)}{\partial \theta_j} b_j = \sum_i a_i b_i \tag{3.20}$$

と書き直せる．ここで，任意の実確率変数 $A(x)$，$B(x)$ に対して成り立つシュワルツの不等式

$$\left(\sum_x p(x|\theta) A(x) B(x)\right)^2 \leq \left(\sum_x p(x|\theta) A(x)^2\right) \left(\sum_x p(x|\theta) B(x)^2\right) \tag{3.21}$$

において，$A(x) = \sum_i a_i(\theta_i^{\mathrm{est}}(x) - \theta_i)$，$B(x) = \sum_j (\partial p(x|\theta)/\partial \theta_j) b_j$ とおくと，

$$\sum_x p(x|\theta) \sum_{ij} a_i \left(\theta_i^{\mathrm{est}}(x) - \theta_i\right) \frac{\partial p(x|\theta)}{\partial \theta_j} b_j$$

$$
\leq \left[\sum_x p(x|\theta) \left(\sum_i a_i(\theta_i^{\mathrm{est}}(x) - \theta_i) \right)^2 \right] \left[\sum_x p(x|\theta) \left(\sum_j \frac{\partial \ln p(x|\theta)}{\partial \theta_j} b_j \right)^2 \right] \quad (3.22)
$$

$$
= \left[\sum_{ij} a_i C_{ij} a_j \right] \left[\sum_{ij} b_i J_{ij} b_j \right]
$$

が成り立つことが分かる．したがって，

$$
\left[\sum_{ij} a_i C_{ij} a_j \right] \left[\sum_{ij} b_i J_{ij} b_j \right] \geq \left(\sum_i a_i b_i \right)^2 \tag{3.23}
$$

を得る．ここで $(b_1, b_2, \cdots, b_d)$ は任意なので

$$
\begin{aligned}
\sum_{ij} a_i C_{ij} a_j &\geq \max_{b_1, b_2, \cdots, b_d} \frac{\left(\sum_i a_i b_i\right)^2}{\sum_{ij} b_i J_{ij} b_j} \\
&= \max_{c_1, c_2, \cdots, c_d} \frac{\left(\sum_{ij} a_i (J^{-1/2})_{ij} c_j \right)^2}{\sum_i c_j^2} \\
&= \max_{c_1, c_2, \cdots, c_d \,:\, \sum_i c_i^2 = 1} \left(\sum_{ij} a_i (J^{-1/2})_{ij} c_j \right)^2 \\
&= \sum_{ij} a_i (J^{-1})_{ij} a_j
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

が成り立つ．ここで $c_i := \sum_j (J^{1/2})_{ij} b_j$ とおいた．なお，$c_j = k \sum_i a_i (J^{-1/2})_{ij}$（$k$ は j に依存しない定数）のとき，三行目の最大値が達成される．さらに $(a_1, a_2, \cdots, a_d)$ も任意なので，

$$
C \geq J^{-1} \tag{3.25}
$$

を得る．これは $N = 1$ の場合のクラメール・ラオ不等式 (3.10) に他ならない．

次に $N > 1$ の場合について (3.10) を示そう．(3.3) で定義される $p(X_N|\theta)$ に対して，行列 J^N の (i, j) 成分を

$$
J_{ij}^N := \sum_{X_N} p(X_N|\theta) \frac{\partial \ln p(X_N|\theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \ln p(X_N|\theta)}{\partial \theta_j} \tag{3.26}
$$

と定義する．x_n と x_m は $n \neq m$ のとき独立であることに注意すると，

$$
J^N = NJ \tag{3.27}
$$

が成り立つことが分かる．したがって，(3.25) の J を J^N で置き換えれば，一般の N についてのクラメール・ラオ不等式 (3.10) を得る．これで証明が完了した．

フィッシャー情報量の簡単な例について考える．まず，x が 0 か 1 の値をとり，それが 0 である確率 θ を推定する場合は，確率分布は (3.1) で与えられる．このときのフィッシャー情報量はスカラーである．$\partial p(0|\theta)/\partial\theta = 1$，$\partial p(1|\theta)/\partial\theta = -1$ より，

$$J = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta} = \frac{1}{\theta(1-\theta)} \tag{3.28}$$

となる．これは $\theta = 1/2$ のときに最小値をとる．

次に，期待値が $\sqrt{S}\theta$ であるようなガウス分布を考え，$S > 0$ が所与のときにを θ を推定することを考える．このとき確率分布は

$$p(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \exp\left(-\frac{(x-\sqrt{S}\theta)^2}{2N}\right) \tag{3.29}$$

となる．ここで $N > 0$ は分散を表す（この段落では N はサンプル数ではないので注意）．すなわちこれは，真の値が θ である信号が $\sqrt{S}$ 倍に増幅されたあと，分散が N のガウス雑音 ξ が加わって x になった状況を表している:

$$x = \sqrt{S}\theta + \xi. \tag{3.30}$$

このとき，S/N は **S/N 比（信号/雑音比，signal-to-noise ratio）** と解釈できる．ここで

$$\frac{\partial p(x|\theta)}{\partial \theta} = \frac{\sqrt{S}(x-\sqrt{S}\theta)}{N} p(x|\theta) \tag{3.31}$$

なので，フィッシャー情報量は

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{S(x-\sqrt{S}\theta)^2}{N^2} p(x|\theta) = \frac{S}{N} \tag{3.32}$$

となる．すなわち，この設定でのフィッシャー情報量は S/N 比に等しい．この結果は，フィッシャー情報量が推定の感度を与えるという事実をまさに表現している．

本節の最後に，有用な推定の方法として知られる**最尤推定法（maximum likelihood estimation）**について簡単に議論しておく．ある測定結果 X_N が与えられたとき，$p(X_N|\theta)$ を最大にする（あるいは等価なことだが，$\ln p(X_N|\theta)$ を最大にする）θ を，$\theta^{\mathrm{L}}(X_N)$ と書く．θ の推定値として $\theta^{\mathrm{L}}(X_N)$ を採用する方法は最尤推定法と呼ばれ，$\ln p(X_N|\theta)$ は**尤度関数**と呼ばれる．最尤推定法は，**漸近不偏性**と呼ばれる性質

$$\lim_{N\to\infty} \theta^{\mathrm{L}}(X_N) = \theta \tag{3.33}$$

を満たすことが知られている[*5)]．すなわち，サンプル数が十分に大きければ，最尤推定は不偏性を満たす．さらに，最尤推定法はクラメール・ラオ不等式 (3.10) の下限を漸近的に達成可能であることが知られている．すなわち，最尤推定値の共分散行列

$$C_{ij}^N := \sum_{X_N} p(X_N|\theta)(\theta_i^{\mathrm{L}}(X_N) - \theta_i)(\theta_j^{\mathrm{L}}(X_N) - \theta_j) \tag{3.34}$$

に対して

$$\lim_{N\to\infty} N C_{ij}^N = (J^{-1})_{ij} \tag{3.35}$$

が成立する．これは，最尤推定法が漸近的に最適な推定法であることを示している．

---

*5) 等号は確率収束の意味で成立する．

3.2 量子推定理論

本節では，量子推定の考え方と，その基本的な応用について述べる．

3.2.1 量子推定の考え方

量子推定においては，確率分布のかわりに密度演算子がパラメータで特徴づけられている状況を考える．推定すべきパラメータを $\theta := (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_d)$ とする．すなわち，密度演算子は $\hat{\rho}_\theta$ のようにパラメトライズされており，θ に関して必要なだけ微分可能とする．また，$\hat{\rho}_\theta$ には逆行列が存在すると仮定する．この密度演算子で記述される量子系が N 個あり，それらはお互いに独立とする．このとき，全系の密度演算子は $\hat{\rho}_\theta^{\otimes N} := \hat{\rho}_\theta \otimes \hat{\rho}_\theta \otimes \cdots \otimes \hat{\rho}_\theta$（すなわち，$N$ 個の $\hat{\rho}_\theta$ のテンソル積）で与えられる．これは量子系の場合の i.i.d. に相当する．この量子状態に対して量子測定を行い，その結果をもとにパラメータ θ を推定するのが量子推定である．測定は，N 個のサンプルのそれぞれに対して独立に行うものとする．

さて，古典推定の場合は，測定の方法は一通り（すなわち，x の値を知ること）だけであった．一方で量子系の場合は，どのような基底で測定をするか（あるいはより一般に，どのような POVM で測定するか）という自由度がある．測定を記述する POVM を $\{\hat{E}_k\}$ とする．これによって状態 $\hat{\rho}_\theta$ を測定して，測定結果 k が得られる確率は

$$p(k|\theta) = \mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta \hat{E}_k] \tag{3.36}$$

で与えられる．すなわち，POVM を一つ決めればそれに対応して，θ でパラメトライズされた古典的な確率分布が得られる．そこで，この確率分布 $p(k|\theta)$ に対応した古典フィッシャー情報行列 J を考えると，その (i, j) 成分は (3.9) より

$$\begin{aligned} J_{ij} &:= \sum_k p(k|\theta) \frac{\partial \ln p(k|\theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \ln p(k|\theta)}{\partial \theta_j} \\ &= \sum_k \frac{1}{\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta \hat{E}_k]} \mathrm{tr}\left[\frac{\partial \hat{\rho}_\theta}{\partial \theta_i} \hat{E}_k\right] \mathrm{tr}\left[\frac{\partial \hat{\rho}_\theta}{\partial \theta_j} \hat{E}_k\right] \end{aligned} \tag{3.37}$$

で与えられる．J には逆行列が存在すると仮定する．ここで，実ベクトル $(a_1, a_2, \cdots, a_d)$ に対して

$$A := \sum_i a_i \theta_i \tag{3.38}$$

と定義される量を推定する場合，その不偏推定値の分散の下限は，古典推定のクラメール・ラオ不等式より

$$(\Delta A^{\mathrm{est}})^2 \geq \frac{1}{N} \sum_{ij} a_i (J^{-1})_{ij} a_j \tag{3.39}$$

で与えられる．

3.2.2 量子フィッシャー情報量と量子クラメール・ラオ不等式

さて，古典フィッシャー情報量 (3.37) は，状態 $\hat{\rho}_\theta$ だけでなく POVM $\{\hat{E}_k\}$ にも依存している．そこで，状態だけに依存する量で推定精度の下限を特徴づけるためには，**量子フィッシャー情報量**を導入する必要がある．しかし，フィッシャー情報量の概念を量子系

に拡張する方法は一意ではない．それは，古典フィッシャー情報行列の定義 (3.9) における $\partial \ln p[x|\theta]/\partial\theta_i$ を量子系の場合に拡張する方法が，演算子の非可換性によって一意ではなくなることに起因する．そのため，量子フィッシャー情報量は無数の種類があり*6)，状況に適したものを使い分ける必要がある．以下では代表的な三種類の量子フィッシャー情報量を紹介する．

RLD フィッシャー情報量

まず，RLD（Right Logarithmic Derivative, 右対数微分）フィッシャー情報量を考える．

$$\frac{\partial\hat{\rho}_\theta}{\partial\theta_i} = \hat{\rho}_\theta\hat{L}_{\theta i} \tag{3.40}$$

を満たす $\hat{L}_{\theta i}$ を用いて，RLD フィッシャー情報行列 R の (i,j) 成分は

$$R_{ij} := \mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta\hat{L}_{\theta i}\hat{L}_{\theta j}^\dagger] \tag{3.41}$$

と定義される．$R_{ij} = R_{ji}^*$ より，これはエルミート行列である．(3.40) より

$$\hat{L}_{\theta i} = \hat{\rho}_\theta^{-1}\frac{\partial\hat{\rho}_\theta}{\partial\theta_i} \tag{3.42}$$

なので，これを (3.41) の右辺に代入すると

$$R_{ij} = \mathrm{tr}\left[\hat{\rho}_\theta^{-1}\frac{\partial\hat{\rho}_\theta}{\partial\theta_i}\frac{\partial\hat{\rho}_\theta}{\partial\theta_j}\right] \tag{3.43}$$

が得られる．

SLD フィッシャー情報量

次に，SLD（Symmetric Logarithmic Derivative, 対称対数微分）フィッシャー情報量を考える．

$$\frac{\partial\hat{\rho}_\theta}{\partial\theta_i} = \frac{1}{2}\left(\hat{\rho}_\theta\hat{L}_{\theta i} + \hat{L}_{\theta i}\hat{\rho}_\theta\right) \tag{3.44}$$

を満たす $\hat{L}_{\theta i}$ を用いて，SLD フィッシャー情報行列 S の (i,j) 成分を

$$S_{ij} := \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\hat{\rho}_\theta(\hat{L}_{\theta i}\hat{L}_{\theta j} + \hat{L}_{\theta i}\hat{L}_{\theta j})\right] \tag{3.45}$$

と定義する．ある $\hat{L}_{\theta i}$ が (3.44) の解ならば $\hat{L}_{\theta i}^\dagger$ も (3.44) の解となるので，$\hat{L}_{\theta i}$ はエルミート行列としても一般性を失わない．このとき $S_{ij} = S_{ji} = S_{ij}^*$ となるので，S は実対称行列である．

ALD フィッシャー情報量

次に，ALD（Anti-symmetric Logarithmic Derivative, 反対称対数微分）フィッシャー情報量を考える*7)．

$$\frac{\partial\hat{\rho}_\theta}{\partial\theta_i} = \frac{1}{2}\left(\hat{\rho}_\theta\hat{L}_{\theta i} + \hat{L}_{\theta i}^\dagger\hat{\rho}_\theta\right) \tag{3.46}$$

---

*6）無限個の種類の量子フィッシャー情報量があることが知られており，その特徴づけについての理論もある．詳しくは [52] などを参照．

*7）これについて必ずしも統一名称はないようである．これも単に SLD フィッシャー情報量と呼ばれることもある．ALD という名称は [19] に従った．

を満たす（エルミートとは限らない）$\hat{L}_{\theta i}$ を用いて，ALD フィッシャー情報行列 $\tilde{S}$ を

$$\tilde{S}_{ij} := \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta(\hat{L}_{\theta i}\hat{L}_{\theta j}^\dagger + \hat{L}_{\theta j}\hat{L}_{\theta i}^\dagger)] \tag{3.47}$$

と定義する．$\tilde{S}_{ij} = \tilde{S}_{ji} = \tilde{S}_{ij}^*$ より，これは実対称行列である．

さて，上記で導入したいずれの量子フィッシャー情報量 R，S，$\tilde{S}$ に対しても，(3.37) で定義された古典フィッシャー情報量 J との間に

$$R \geq J, \quad S \geq J, \quad \tilde{S} \geq J \tag{3.48}$$

が行列不等式として成立する（証明は以下で行う）．これらは**量子クラメール・ラオ不等式**と呼ばれる．これと古典クラメール・ラオ不等式 (3.11) を合わせると，任意の POVM に対して

$$(\Delta A^{\mathrm{est}})^2 \geq \frac{1}{N}\sum_{ij} a_i (K^{-1})_{ij} a_j, \quad K := R,\ S,\ \tilde{S} \tag{3.49}$$

が成立することが分かる．これも量子クラメール・ラオ不等式と呼ばれる．ここで右辺が POVM に依存しない量であることが重要である．すなわち，量子フィッシャー情報量は，どのような測定を行ったとしても超えられない推定精度の限界を与えている．

量子クラメール・ラオ不等式 (3.48) を証明しよう．まず RLD の場合を証明する．(3.40) より

$$\frac{\partial \hat{\rho}_\theta}{\partial \theta_i} = \hat{\rho}_\theta \hat{L}_{\theta i} = \hat{L}_{\theta i}^\dagger \hat{\rho}_\theta \tag{3.50}$$

が成り立つことに注意すると，(3.37) は

$$J_{ij} = \sum_k \frac{1}{\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta \hat{E}_k]}\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta \hat{L}_{\theta i}\hat{E}_k]\mathrm{tr}[\hat{L}_{\theta i}^\dagger \hat{\rho}_\theta \hat{E}_k] \tag{3.51}$$

と書ける．任意の複素ベクトル $(a_1, a_2, \cdots, a_d)$ に対して

$$\hat{L}_\theta := \sum_i a_i \hat{L}_{\theta i} \tag{3.52}$$

と定義すると，

$$\begin{aligned}
\sum_{ij} a_i J_{ij} a_j^* &= \sum_k \frac{1}{\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta \hat{E}_k]}\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta \hat{L}_\theta \hat{E}_k]\mathrm{tr}[\hat{L}_\theta^\dagger \hat{\rho}_\theta \hat{E}_k] \\
&= \sum_k \frac{1}{\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta \hat{E}_k]}\left|\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta \hat{L}_\theta \hat{E}_k]\right|^2 \\
&= \sum_k \frac{1}{\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta \hat{E}_k]}\left|\mathrm{tr}[\hat{E}_k^{1/2}\hat{\rho}_\theta^{1/2}\cdot \hat{\rho}_\theta^{1/2}\hat{L}_\theta \hat{E}_k^{1/2}]\right|^2 \\
&\leq \sum_k \frac{1}{\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta \hat{E}_k]}\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta \hat{E}_k]\mathrm{tr}[\hat{L}_\theta^\dagger \hat{\rho}_\theta \hat{L}_\theta \hat{E}_k] \\
&= \sum_k \mathrm{tr}[\hat{L}_\theta^\dagger \hat{\rho}_\theta \hat{L}_\theta \hat{E}_k] \\
&= \mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta \hat{L}_\theta \hat{L}_\theta^\dagger]
\end{aligned} \tag{3.53}$$

が成り立つ．ここで三行目から四行目への変形で，任意の $\hat{A}$，$\hat{B}$ に対して成り立つシュワルツの不等式

$$\left|\mathrm{tr}[\hat{A}^\dagger \hat{B}]\right|^2 \leq \mathrm{tr}[\hat{A}^\dagger \hat{A}]\mathrm{tr}[\hat{B}^\dagger \hat{B}] \tag{3.54}$$

を使った．ここで RLD フィッシャー情報量に対して

$$\sum_{ij} a_i R_{ij} a_j^* = \mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta \hat{L}_\theta \hat{L}_\theta^\dagger] \tag{3.55}$$

が成り立つことに注意すると，量子クラメール・ラオ不等式 (3.48) が得られる．

SLD や ALD フィッシャー情報量に対しても，RLD の場合と同様にして量子クラメール・ラオ不等式 (3.48) を示すことができる．これらはともに実対称行列で，J も実対称行列なので，$(a_1, a_2, \cdots, a_d)$ として実ベクトルだけを考えれば十分である．以下では ALD フィッシャー情報量 $\tilde{S}$ の場合を示す．(3.46) で定義される $\hat{L}_{\theta i}$ に対して (3.52) によって $\hat{L}_\theta$ を定義すると，

$$\begin{aligned}\sum_{ij} a_i J_{ij} a_j &= \sum_k \frac{1}{\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta \hat{E}_k]} \left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}[(\hat{\rho}_\theta \hat{L}_\theta + \hat{L}_\theta^\dagger \hat{\rho}_\theta)\hat{E}_k]\right)^2 \\ &= \sum_k \frac{1}{\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta \hat{E}_k]} \left|\mathrm{Re}\left(\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta \hat{L}_\theta \hat{E}_k]\right)\right|^2 \\ &\leq \sum_k \frac{1}{\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta \hat{E}_k]} \left|\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta \hat{L}_\theta \hat{E}_k]\right|^2\end{aligned} \tag{3.56}$$

が成り立つ．ここで Re は実部を表す．RLD フィッシャー情報量の場合と同様にシュワルツの不等式を適用すると，

$$\sum_{ij} a_i J_{ij} a_j \leq \sum_{ij} a_i \mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta \hat{L}_{\theta i} \hat{L}_{\theta j}^\dagger] a_j \tag{3.57}$$

が得られる．ここで $\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta \hat{L}_{\theta i} \hat{L}_{\theta j}^\dagger]$ を (i, j) 成分とする行列はエルミートで，$(a_1, a_2, \cdots, a_d)$ は実ベクトルなので，右辺は実数であることに注意．したがって

$$\sum_{ij} a_i \tilde{S}_{ij} a_j = \sum_{ij} a_i \mathrm{Re}\left[\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta \hat{L}_{\theta i} \hat{L}_{\theta j}^\dagger]\right] a_j = \sum_{ij} a_i \mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta \hat{L}_{\theta i} \hat{L}_{\theta j}^\dagger] a_j \tag{3.58}$$

が成り立ち，量子クラメール・ラオ不等式 (3.48) が得られる．

量子クラメール・ラオ不等式の簡単な応用として，状態がカノニカル分布であるが温度が分からない場合について，温度を推定することを考える．逆温度を β として[*8]，これをパラメータとする密度演算子

$$\hat{\rho}_\beta := e^{-\beta(\hat{H} - F(\beta))} \tag{3.59}$$

を考える．ここで $\hat{H}$ はハミルトニアン，

$$F(\beta) := -\beta^{-1} \ln \mathrm{tr}\left[e^{-\beta \hat{H}}\right] \tag{3.60}$$

は逆温度 β における自由エネルギーである．このとき

$$\frac{d\hat{\rho}_\beta}{d\beta} = \hat{\rho}_\beta(-\hat{H} + \langle \hat{H} \rangle_\beta) \tag{3.61}$$

*8) 温度を T，ボルツマン定数を k_B として，$\beta := (k_\mathrm{B} T)^{-1}$ を逆温度と呼ぶ．

が成り立つ．ここで $\langle\hat{H}\rangle_\beta := \mathrm{tr}[\hat{\rho}_\beta\hat{H}]$ であり，関係式

$$-\frac{d}{d\beta}(\beta F_\beta) = \langle\hat{H}\rangle_\beta \tag{3.62}$$

を用いた．したがって $d\hat{\rho}_\beta/d\beta$ はエルミートで $\hat{\rho}_\beta$ と可換なので，RLD，SLD，ALD フィッシャー情報量はすべて一致する．たとえば RLD を考えると，

$$\hat{L}_\beta := -\hat{H} + \langle\hat{H}\rangle_\beta \tag{3.63}$$

を用いて

$$R := \mathrm{tr}[\hat{\rho}_\beta\hat{L}_\beta^2] = \langle\hat{H}^2\rangle_\beta - \langle\hat{H}\rangle_\beta^2 \tag{3.64}$$

が成り立つ．エネルギーの分散を $(\Delta\hat{H})^2 := \langle\hat{H}^2\rangle_\beta - \langle\hat{H}\rangle_\beta^2$ とおき，逆温度の推定値の分散を $(\Delta\beta^{\mathrm{est}})^2$ とおく．このとき，量子クラメール・ラオ不等式は

$$(\Delta\beta^{\mathrm{est}})^2(\Delta\hat{H})^2 \geq 1 \tag{3.65}$$

となる．これは温度とエネルギーの不確定性関係とみなすこともできる．ただしこれは量子論特有のものではなく，古典的なカノニカル分布において逆温度を推定する場合でも同じ不等式が成立する．

3.2.3　量子精密計測への応用

量子推定の重要な応用として，量子系をプローブとして古典的な外場を推定する状況を考えよう．これは**量子精密計測**（**quantum metrology**）と呼ばれる．簡単のために推定したいパラメータは一つとする．$\hat{A}$ を適当な演算子として，ハミルトニアンが $\hat{H} := \hbar\theta\hat{A}$ で与えられる場合を考える．たとえば典型的な状況では，θ は古典的な外部磁場の大きさ，$\hat{A}$ はスピン演算子である．時刻 0 における系の初期状態を $\hat{\rho}$ として，これを時間 τ だけユニタリ発展させる．こうして得られる状態

$$\hat{\rho}_\theta = e^{-\mathrm{i}\theta\hat{A}\tau}\hat{\rho}e^{\mathrm{i}\theta\hat{A}\tau} \tag{3.66}$$

に対して測定を行い，θ を推定することを考える．(3.66) を θ で微分すると

$$\frac{d\hat{\rho}_\theta}{d\theta} = \mathrm{i}\tau\hat{\rho}_\theta\hat{A} - \mathrm{i}\tau\hat{A}\hat{\rho}_\theta \tag{3.67}$$

となる．これは

$$\frac{d\hat{\rho}_\theta}{d\theta} = \mathrm{i}\tau\hat{\rho}_\theta(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle_\theta) - \mathrm{i}\tau(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle_\theta) \tag{3.68}$$

と書き直すこともできる．ここで $\langle\hat{A}\rangle_\theta := \mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta\hat{A}]$ とおいた．

ここで ALD フィッシャー情報量を考える．(3.46) で定義される $\hat{L}_\theta$ は，(3.68) より

$$\hat{L}_\theta := 2\mathrm{i}\tau(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle_\theta) \tag{3.69}$$

で与えられる．したがって，ALD フィッシャー情報量は

$$\tilde{S} := \mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta\hat{L}_\theta\hat{L}_\theta^\dagger] = 4\tau^2(\langle\hat{A}^2\rangle_\theta - \langle\hat{A}\rangle_\theta^2) \tag{3.70}$$

となる（ここで $\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta\hat{L}_\theta\hat{L}_\theta^\dagger]$ は実数なので，実部をとる必要がないことに注意）．$\hat{A}$ の分散

を $(\Delta\hat{A})^2 := \langle\hat{A}^2\rangle_\theta - \langle\hat{A}\rangle_\theta^2$ とおき，θ の推定値の分散を $(\Delta\theta^{\mathrm{est}})^2$ とおく．このとき，量子クラメール・ラオ不等式は

$$(\Delta\theta^{\mathrm{est}})^2(\Delta\hat{A})^2 \geq \frac{1}{4\tau^2} \tag{3.71}$$

となる．すなわち，外場の推定精度の下限は，それと結合した物理量のゆらぎで決まる．

とくに，θ が z 方向の磁場で，$\hat{A} := \hat{J}_z$ がスピン演算子の z 成分とする．また，密度演算子の初期状態 $\hat{\rho}$ は $\mathrm{tr}[\hat{J}_x\hat{\rho}] = J$（$J$ は全スピンの大きさ）を満たし，$\hat{J}_y$ と $\hat{J}_z$ はケナード・ロバートソンの不確定性関係 (2.86) の下限を達成するとする:

$$\langle\Delta\hat{J}_y^2\rangle\langle\Delta\hat{J}_z^2\rangle = \frac{J^2}{4}. \tag{3.72}$$

このとき，(3.71) は

$$(\Delta\theta^{\mathrm{est}})^2 \geq \frac{\langle\Delta\hat{J}_y^2\rangle}{J^2\tau^2} \tag{3.73}$$

となる．

もしも $\hat{\rho}$ が，スピンの期待値が x 方向を向いたスピンコヒーレント状態ならば，$\langle\Delta\hat{J}_y^2\rangle = J/2$ なので，(3.73) の右辺は $(2J\tau^2)^{-1}$ となる．これは $J \to \infty$ の極限でゼロに漸近する．すなわち，全スピンが大きいほど精度の高い推定が可能である．この仕組みは，2.4.4 節の図 2.6 でスピンの QND 測定を考えたときと，本質的には同じである．また，もしも $\hat{\rho}$ が $\langle\Delta\hat{J}_y^2\rangle < J/2$ となるようなスピン・スクイズド状態（squeezed spin state）ならば，(3.73) の右辺は $(2J\tau^2)^{-1}$ よりも小さくなり，より精度の高い推定が可能である．

(3.73) の推定精度の下限は，以下のようにして達成可能である: 時刻 τ に $\hat{J}_y$ を射影測定して，その結果を $J_y(\tau)$ としたとき，θ の推定値を

$$\theta^{\mathrm{est}} := \frac{J_y(\tau)}{J\tau} \tag{3.74}$$

とする．ただし，$\theta\tau$ は小さいとする*9)．この推定の性質を考えるために，(3.66) の時間発展をハイゼンベルク表示で考えよう．ハイゼンベルク方程式は

$$\frac{d\hat{J}_x(t)}{dt} = -\theta\hat{J}_y(t), \quad \frac{d\hat{J}_y(t)}{dt} = \theta\hat{J}_x(t), \quad \frac{d\hat{J}_z(t)}{dt} = 0 \tag{3.75}$$

である．これを $\hat{J}_x(0) = \hat{J}_x$，$\hat{J}_y(0) = \hat{J}_y$ という条件のもとで解いて，$\theta\tau$ が小さいとして一次までとると，

$$\hat{J}_y(\tau) = \hat{J}_x\sin(\theta\tau) + \hat{J}_y\cos(\theta\tau) \simeq \hat{J}_x\theta\tau + \hat{J}_y \tag{3.76}$$

を得る．(3.74) における J_y の期待値は $\langle\hat{J}_y(\tau)\rangle$ に他ならないことに注意すると，(3.74) が不偏推定になっていることが分かる:

$$\langle\theta^{\mathrm{est}}\rangle = \frac{\langle\hat{J}_y(\tau)\rangle}{J\tau} = \frac{\langle\hat{J}_x\rangle\theta\tau}{J\tau} = \theta. \tag{3.77}$$

また，$\langle\hat{J}_y(\tau)^2\rangle = \langle\hat{J}_y^2\rangle$ に注意すると，推定値の分散は

*9) 微小な外場を検出するのが重要な状況などを考えると，実用上も有用な仮定である．

$$(\theta^{\text{est}})^2 = \frac{\langle \hat{J}_y(\tau)^2 \rangle}{J^2\tau^2} = \frac{\langle \hat{J}_y^2 \rangle}{J^2\tau^2} \tag{3.78}$$

となり，たしかに (3.73) の下限を達成していることが分かる．

3.2.4 物理量の期待値の推定

次に，複数のパラメータを推定する例として，2.5 節で考えた有限次元の密度演算子の状態推定を考える．ヒルベルト空間の次元を N とすると，SU(N) の生成子 $\{\hat{\lambda}_i\}_{i=1}^d$（ここで $d := N^2 - 1$）によって (2.200) のようにして密度演算子を展開できる．すなわち，$\theta := (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_d)$ として，

$$\hat{\rho}_\theta = \frac{\hat{I}}{N} + \sum_i \theta_i \hat{\lambda}_i \tag{3.79}$$

という密度演算子の推定を考える．また，物理量 $\hat{A}$ は実ベクトル $(a_1, a_2, \cdots, a_d)$ を用いて

$$\hat{A} = \sum_i a_i \hat{\lambda}_i \tag{3.80}$$

と展開できる．その期待値は，(2.201) によって

$$\langle \hat{A} \rangle_\theta := \mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta \hat{A}] = \sum_i a_i \theta_i \tag{3.81}$$

と書くことができる．

さて，以上の設定において，θ を推定する際の RLD フィッシャー情報量を計算しよう．(3.40) は

$$\hat{\lambda}_i = \hat{\rho}_\theta \hat{L}_{\theta i} \tag{3.82}$$

となる．この $\hat{L}_{\theta i}$ を

$$\hat{L}_{\theta i} = x_i \hat{I} + \sum_j y_{ij} \hat{\lambda}_j \tag{3.83}$$

と展開する．x_i と y_{ij} は適当な複素数である．このとき

$$\hat{\rho}_\theta \hat{L}_{\theta i} = \left(x_i + \sum_j y_{ij}\theta_j \right) \frac{\hat{I}}{N} + \sum_j \left(x_i \theta_j + \frac{y_{ij}}{N} \right) \hat{\lambda}_j + \sum_{jkl} h_{kjl} y_{ik} \hat{\lambda}_j \theta_l \tag{3.84}$$

となる．ここで右辺第三項を得るのに (2.198) を使った．したがって，(3.82) は

$$\begin{aligned} x_i + \sum_j y_{ij}\theta_j &= 0, \\ x_i \theta_j + \frac{y_{ij}}{N} + \sum_{kl} h_{kjl} y_{ik} \theta_l &= \delta_{ij} \end{aligned} \tag{3.85}$$

となる．これらから

$$\sum_k y_{ik} C_{kj} = \delta_{ij} \tag{3.86}$$

を得る．ここで

$$C_{kj} := \frac{\delta_{kj}}{N} + \sum_l h_{kjl}\theta_l - \theta_k \theta_j \tag{3.87}$$

とおいた．これは $d\times d$ のエルミート行列である．したがって

$$y_{ij}=\sum_k \delta_{ik}(C^{-1})_{kj}=(C^{-1})_{ij} \tag{3.88}$$

を得る．RLD フィッシャー情報行列は

$$R_{ij}=\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta \hat{L}_{\theta i}\hat{L}_{\theta j}^\dagger]=\mathrm{tr}[\hat{\lambda}_i\hat{L}_j^\dagger]=y_{ji}^*=(C^{-1})_{ji}^*=(C^{-1})_{ij} \tag{3.89}$$

となる．したがって

$$(R^{-1})_{ij}=C_{ij} \tag{3.90}$$

となる．一方，

$$\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j]=\frac{\delta_{ij}}{N}+\sum_k h_{ijk}\theta_k,\quad \mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta\hat{\lambda}_i]=\theta_i \tag{3.91}$$

が成立する．したがって，C_{ij} は共分散行列に他ならない:

$$C_{ij}=\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j]-\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta\hat{\lambda}_i]\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta\hat{\lambda}_j]. \tag{3.92}$$

このように，RLD フィッシャー情報行列は，共分散行列の逆行列で与えられることが分かる．なお，同様にして SLD フィッシャー情報行列も計算できる．

さて，量子状態 $\hat{\rho}_\theta$ に対して POVM $\{\hat{E}_k\}$ で測定を行う．測定結果 k が得られる確率は $p(k|\theta)=\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta\hat{E}_k]$ で，古典フィッシャー情報行列は (3.37) で与えられる．この測定結果から，(3.80) で与えられる物理量 $\hat{A}$ の期待値 (3.81) を推定することを考えよう．推定は不偏推定であるとして，その推定値の分散を $(\Delta A^{\mathrm{est}})^2$ とすると，古典クラメール・ラオ不等式より

$$(\Delta A^{\mathrm{est}})^2\geq\sum_{ij}a_i(J^{-1})_{ij}a_j \tag{3.93}$$

が成立する．また，量子クラメール・ラオ不等式より $(J^{-1})_{ij}\geq(R^{-1})_{ij}$ なので，

$$(\Delta A^{\mathrm{est}})^2\geq\sum_{ij}a_i(R^{-1})_{ij}a_j \tag{3.94}$$

が成立する．ここで (3.90) と (3.92) より

$$\sum_{ij}a_i(R^{-1})_{ij}a_j=\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta\hat{A}^2]-(\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\theta\hat{A}])^2=:(\Delta\hat{A})^2 \tag{3.95}$$

が成立する．したがって (3.94) は

$$(\Delta A^{\mathrm{est}})^2\geq(\Delta\hat{A})^2 \tag{3.96}$$

と書ける．すなわち，物理量の期待値の推定値の分散は，物理量の量子ゆらぎ以上である．また，物理量 $\hat{A}$ を射影測定して得られた結果を推定値とすれば，明らかにその分散は $(\Delta\hat{A})^2$ に等しい．したがって，不等式 (3.96) は射影測定によって等号達成可能である*10)．

*10) ただし，射影測定の場合は古典フィッシャー情報量 J が逆行列をもたない．したがって，J が逆行列をもつ範囲内で $\{\hat{E}_k\}$ を射影測定に近づける極限で $\varepsilon(\hat{A};\{\hat{E}_k\})$ がゼロに近づく，というのが正確な表現である．

POVM $\{\hat{E}_k\}$ が与えられたとき，測定結果 k から推定値 A^{est} への写像をうまくとれば，古典クラメール・ラオ不等式 (3.93) は少なくとも漸近的に等号達成可能である（たとえば最尤推定法を用いればよい）．そこで，POVM に固有の誤差（測定誤差）を

$$\varepsilon(\hat{A};\{\hat{E}_k\}) := \sum_{ij} a_i (J^{-1} - R^{-1})_{ij} a_j \tag{3.97}$$

と定義することは理にかなっている．この量は非負であり，$\hat{A}$ の射影測定の場合にゼロになる．

なお $(\Delta A^{\mathrm{est}})^2 - (\Delta \hat{A})^2$ や $\varepsilon(\hat{A};\{\hat{E}_k\})$ は，2.2.1 節と 2.3.3 節で議論した入力等価雑音の一般化とみなすことができる．実際，(2.105) のように入力と出力が線形関係で結ばれている場合は，測定結果の平均を増幅率で割るだけで，$\hat{A}$ の期待値が推定できる．この場合の入力等価雑音 (2.73) は $(\Delta A^{\mathrm{est}})^2 - (\Delta \hat{A})^2$ と一致する．なお，推定が不偏推定であることが，2.2.1 節や 2.3.3 節で議論した不偏性条件に対応している．一般の測定の場合は，測定結果に非線形なデータ処理を行って $\hat{A}$ の期待値を推定する．このような場合にも，$(\Delta A^{\mathrm{est}})^2 - (\Delta \hat{A})^2$ は入力等価雑音と本質的には同じ物理的意味をもっており，したがって $(\Delta A^{\mathrm{est}})^2 - (\Delta \hat{A})^2$ や $\varepsilon(\hat{A};\{\hat{E}_k\})$ を入力等価雑音の一般化とみなすことができる．

3.2.5　不確定性関係への応用

3.2.5.1　時間とエネルギーの不確定性関係

時間とエネルギーの不確定性関係を，量子推定理論の立場から考えよう．以下に示すように，これは 3.2.3 節で議論した外場の推定と本質的に同じ議論である．ハミルトニアン $\hat{H}$ でユニタリ発展するシステムを測定し，その測定結果から時刻 t を推定することを考える．時刻 0 における初期状態を $\hat{\rho}$ とすると，時刻 t における密度演算子は，

$$\hat{\rho}_t = e^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}\hat{\rho}\, e^{\mathrm{i}\hat{H}t} \tag{3.98}$$

と書ける．この時間微分はフォンノイマン方程式で与えられ，

$$\frac{d\hat{\rho}_t}{dt} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{\rho}_t\hat{H} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}\hat{\rho}_t \tag{3.99}$$

となる．これは

$$\frac{d\hat{\rho}_t}{dt} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{\rho}_t(\hat{H} - \langle\hat{H}\rangle_t) - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\hat{H} - \langle\hat{H}\rangle_t)\hat{\rho}_t \tag{3.100}$$

と書き直すこともできる．ここで $\langle\hat{H}\rangle_t := \mathrm{tr}[\hat{\rho}_t\hat{H}]$ とおいた．

ここで ALD フィッシャー情報量を考える．(3.46) で定義される $\hat{L}_t$ は，(3.100) より

$$\hat{L}_t := \frac{2\mathrm{i}}{\hbar}(\hat{H} - \langle\hat{H}\rangle_t) \tag{3.101}$$

で与えられる．したがって，ALD フィッシャー情報量は

$$\tilde{S} := \mathrm{tr}[\hat{\rho}_t\hat{L}_t\hat{L}_t^\dagger] = \frac{4}{\hbar^2}(\langle\hat{H}^2\rangle_t - \langle\hat{H}\rangle_t^2) \tag{3.102}$$

となる．エネルギーの分散を $(\Delta\hat{H})^2 := \langle\hat{H}^2\rangle_t - \langle\hat{H}\rangle_t^2$ とおき，時間の推定値の分散を $(\Delta t^{\mathrm{est}})^2$ とおく．このとき，量子クラメール・ラオ不等式は

$$(\Delta t^{\rm est})^2(\Delta \hat{H})^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \tag{3.103}$$

となる．これは時間とエネルギーの不確定性関係の一つの表現と見ることができる．

3.2.5.2 非可換な物理量の同時推定

任意の二つの非可換な物理量の同時測定に関係する不確定性関係を，量子推定理論の立場から導こう*11)．ここでは量子系が有限次元の場合を考え，3.2.4 節で考えた方法で密度演算子をパラメトライズする．(3.79) で与えられる密度演算子 $\hat{\rho}_\theta$ に対して，POVM $\{\hat{E}_k\}$ で測定を行う．その結果をもとに，(3.80) で与えられる物理量 $\hat{A}$ の期待値と，$\hat{B} := \sum_i b_i \hat{\lambda}_i$ で与えられる物理量の期待値を同時に不偏推定することを考える．そのときの測定誤差は (3.97) で与えられる $\varepsilon(\hat{A};\{\hat{E}_k\})$ と $\varepsilon(\hat{B};\{\hat{E}_k\})$ で特徴づけることができる．この測定誤差の間に成り立つ不確定性関係を考える．

t を任意の実数として，古典フィッシャー情報量 J_{ij} と RLD 量子フィッシャー情報量 R_{ij} について次の量を考える:

$$\begin{aligned}
&\sum_{ij}(a_i - {\rm i}b_i t)(J^{-1} - R^{-1})_{ij}(a_j + {\rm i}b_j t) \\
=&\varepsilon(\hat{A};\{\hat{E}_k\}) + t^2\varepsilon(\hat{B};\{\hat{E}_k\}) + {\rm i}t\sum_{ij}(a_i(R^{-1})_{ij}b_j k - b_i(R^{-1})_{ij}b_j) \\
=&\varepsilon(\hat{A};\{\hat{E}_k\}) + t^2\varepsilon(\hat{B};\{\hat{E}_k\}) + {\rm i}t{\rm tr}\left[\hat{\rho}_\theta[\hat{A},\hat{B}]\right]
\end{aligned} \tag{3.104}$$

量子クラメール・ラオ不等式より，この量は非負である．したがって，これを t の二次方程式とみたときの判別式はゼロ以下である:

$$\left|{\rm tr}\left[\hat{\rho}_\theta[\hat{A},\hat{B}]\right]\right|^2 - 4\varepsilon(\hat{A};\{\hat{E}_k\})\varepsilon(\hat{B};\{\hat{E}_k\}) \leq 0. \tag{3.105}$$

ここから，$\varepsilon(\hat{A};\{\hat{E}_k\})$ と $\varepsilon(\hat{B};\{\hat{E}_k\})$ に関する不確定性関係

$$\varepsilon(\hat{A};\{\hat{E}_k\})\varepsilon(\hat{B};\{\hat{E}_k\}) \geq \frac{1}{4}\left|{\rm tr}\left[\hat{\rho}_\theta[\hat{A},\hat{B}]\right]\right|^2 \tag{3.106}$$

を得る．とくに，右辺がゼロでないときに一方の物理量に対して射影測定をした場合は，もう一方の物理量に対する測定誤差は無限大になる．なお，(3.106) は 2.3 節で議論したアーサー・ケリー・グッドマンの不確定性関係 (2.96) あるいは (2.107) と同じ形である．測定結果に対して不偏性条件を課すことなく，そのかわりに測定結果からの不偏推定を考えることによって，量子推定理論の立場から不確定性関係を導出できたことになる．3.2.4 節で議論したように $\varepsilon(\hat{A};\{\hat{E}_k\})$ は入力等価雑音の一般化とみなすことができるので，不確定性関係 (3.106) は，入力等価雑音についての不確定性関係 (2.107) を，推定が非線形な場合を含む一般の場合に拡張した結果とみることができる．

---

*11) このような方向性の研究には長い歴史がある．たとえば [49] や [18] では，非可換な物理量の同時推定の精度を RLD フィッシャー情報量の立場から議論している．本書の著者らも，1 キュービットの場合について不確定性関係を導出している[50]．本節の内容は，それを有限次元の任意の物理量に一般化した論文 [51] をもとにしている．

第 4 章
量子マスター方程式

本節では，量子開放系の非ユニタリなダイナミクスを連続時間で記述する，量子マスター方程式について詳しく解説する．まず 4.1 節で，クラウス表現をもとにした形式論によって，量子マスター方程式を導く．4.2 節では簡単な具体例として二準位原子のダイナミクスを考える．4.3 節では，環境も含めた全系のユニタリ発展から出発し，ボルン近似やマルコフ近似などによって量子マスター方程式を導く．4.4 節では，具体例として電磁場中にある量子系の従うマスター方程式について議論する．4.5 節では環境が電子系である場合について議論する．

4.1　簡単な形式論

量子マスター方程式は，量子開放系が**マルコフ過程**（**Markov process**）で時間発展するダイナミクスを記述する．マルコフ過程とは，確率的なダイナミクスにおいて，次に起こる事象がその直前の状態だけに依存するような時間発展を意味する．1.3 節で述べたように，非ユニタリ時間発展に伴う状態変化は，その直前の状態にクラウス演算子が作用することによって記述される．このような時間発展が無限小の時間ごとに繰り返し起こるとき，そのダイナミクスはマルコフ過程とみなすことができる．物理的には，環境が無限小時間ごとに次々に新しいものに取り替わっていくことを意味する．

次のようなプロセスを考える．まず，初期時刻 $t=0$ において，システムと環境の間には相関がなく，積状態にあるとする．次に微小時間 Δt だけシステムと環境が相互作用する．そのあと環境は，システムと相関していない新しい環境と置き換わる（図 4.1 を参照）．このようにして，システムと相互作用をする環境はシステムの過去の状態に依存ないので，システムの時間発展はマルコフ過程となる．この微小時間の間の時間発展を特徴づけるクラウス演算子

$$\hat{M}_0 := \hat{I} + (\hat{K} - \mathrm{i}\hat{H})\Delta t, \quad \hat{M}_k := \hat{L}_k\sqrt{\Delta t} \ \ (k \geq 1) \tag{4.1}$$

を導入する．ここで $\hat{K}$ と $\hat{H}$ はエルミート演算子，$\hat{L}_k$ は環境との相互作用を特徴づける適当な演算子である．直感的には，$k=0$ は「何も起きなかった」場合，$k\ (\geq 1)$ はイベント “k” が起きた場合（たとえば，システムから環境へ光子が放出された場合）に対応し

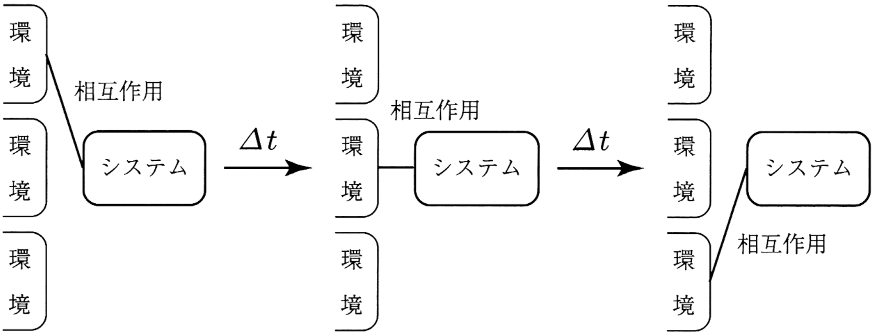


図 4.1　次々に新しい環境と相互作用するマルコフ過程の模式図．環境は微小時間 Δt ごとに新しいものと置き換えられる．

ている．前者の場合にも状態が非ユニタリに時間発展することに注意しよう．これは，後述するように，$k=0$ と $k \geq 1$ の両方の事象が全体として完全性条件 (1.123) を満足しなければならないことの帰結である．

式 (4.1) で与えられるクラウス演算子を用いると，システムの密度演算子の微小時間発展は次のように書ける：

$$\hat{\rho}(t+\Delta t) = \sum_{k\geq 0} \hat{M}_k \hat{\rho}(t) \hat{M}_k^\dagger$$
$$= \hat{\rho}(t) - \mathrm{i}[\hat{H}, \hat{\rho}(t)]\Delta t + \left(\sum_{k\geq 1} \hat{L}_k \hat{\rho}(t) \hat{L}_k^\dagger + \hat{K}\hat{\rho}(t) + \hat{\rho}(t)\hat{K} \right) \Delta t + o(\Delta t). \tag{4.2}$$

ここで $o(\Delta t)$ は Δt より高次の微小量を表す．$\hat{\rho}(t)$ を左辺へ移項して両辺を Δt で割り，$\Delta t \to 0$ の極限をとると

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = -\mathrm{i}[\hat{H}, \hat{\rho}(t)] + \left(\sum_{k\geq 1} \hat{L}_k \hat{\rho}(t) \hat{L}_k^\dagger + \hat{K}\hat{\rho}(t) + \hat{\rho}(t)\hat{K} \right) \tag{4.3}$$

を得る．右辺第一項がユニタリ発展を，残りの項が非ユニタリ発展を表している．すなわち，右辺第一項はシステム固有のユニタリ発展を記述するフォンノイマン方程式 (1.97) の右辺と同じであり，$\hat{H}$ は（プランク定数倍を除いて）システムのハミルトニアンとみなせることが分かる．残りの項は環境との相互作用の結果であるとみなすことができる．

さて，式 (4.1) において，何も起きなかった場合の時間発展は，一見するとハミルトニアン $\hat{H}$ によるユニタリ発展 $e^{\mathrm{i}\hat{H}\Delta t} \simeq \hat{I} - \mathrm{i}\hat{H}\Delta t$ になるように思える．しかしこれを $\hat{M}_0$ と比較すると，非ユニタリ項 $\hat{K}\Delta t$ が付け加わっていることが分かる．式 (4.1) をクラウス演算子が満たすべき完全性条件 (1.123) に代入すると

$$\hat{I} + \left(2\hat{K} + \sum_{k\geq 1} \hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k \right) \Delta t + o(\Delta t) = \hat{I} \tag{4.4}$$

すなわち

$$\hat{K} = -\frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k \tag{4.5}$$

となることが分かる．ここで，Δt は十分に小さいものと仮定して，Δt の二次以上の項は無視した．すなわち，$\hat{K}$ と $\hat{L}_k$ は独立ではない（一方，$\hat{H}$ にはとくに条件は付かない）．この結果は，何も起こらなかったということを観測した効果は，その他のあらゆる事象 $k \geq 1$ が起こる効果を打ち消す非ユニタリ的効果をもたらすと解釈できる．

さて，(4.5) を (4.3) に代入すると，

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = -\mathrm{i}[\hat{H}, \hat{\rho}(t)] + \sum_{k\geq 1}\left(\hat{L}_k\hat{\rho}(t)\hat{L}_k^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k, \hat{\rho}(t)\}\right) \tag{4.6}$$

が得られる．ここで反交換子

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} := \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \tag{4.7}$$

を導入した．(4.6) は**量子マスター方程式**（**quantum master equation**）あるいは**リンドブラッド方程式**（**Lindblad equation**）と呼ばれる．$\hat{L}_k$ は**リンドブラッド演算子**と呼ばれ，非ユニタリ発展を特徴づけている．実際，リンドブラッド演算子がすべて 0 ならば，(4.6) はフォンノイマン方程式に帰着する．

このようにリンドブラッド型のマスター方程式は，系の状態変化が CPTP かつマルコフ的であるという二つの条件だけから導かれる非常に一般的な方程式であり*1)，それゆえ適用範囲も広い．以下でいくつかの具体例を見ていこう．

4.2 二準位原子のダイナミクス

シンプルな具体例として，二準位原子の場合を議論する．パウリ演算子 $\hat{\sigma}_z$ の $+1$ の固有状態 $|1\rangle$ を励起状態，-1 の固有状態 $|0\rangle$ を基底状態とする．これらの準位間のエネルギー差を $\hbar\omega_0$ とすると，ハミルトニアンは $\hat{H} := \hbar\omega_0\hat{\sigma}_z/2$ である．また，以下では相互作用表示をとるものとして，原子の自由ハミルトニアンは陽に考えない．

4.2.1 自然放出

真空中の二準位原子を考える．原子が励起状態にあれば，自然放出によって光子を真空中に放出し，基底状態になる．原子が励起状態にあるときに，微小時間 Δt に光子を放出する確率を $\gamma_0\Delta t$ としよう．γ_0 は自然放出レートである．このプロセスを記述するクラウス演算子は $\hat{M}_1 := \sqrt{\gamma_0\Delta t}\hat{\sigma}_-$ である．実際，原子の状態を $\hat{\rho}$ とすると，微小時間 Δt に光子を放出する確率は $\mathrm{tr}[\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho}]\gamma_0\Delta t$ となり，これは原子が励起状態にある確率と $\gamma_0\Delta t$ の積である．以上より，リンドブラッド演算子は $\hat{L} := \sqrt{\gamma_0}\hat{\sigma}_-$ となる．したがって量子マスター方程式は，

$$\frac{d\hat{\rho}^{\mathrm{I}}}{dt} = \gamma_0\left(\hat{\sigma}_-\hat{\rho}^{\mathrm{I}}\hat{\sigma}_+ - \frac{1}{2}\{\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-, \hat{\rho}^{\mathrm{I}}\}\right) \tag{4.8}$$

となる．

---

*1) 厳密な数学の観点からの議論については，[53] を参照．

(4.8) は解析的に解くことができる．まず密度演算子を，$\hat{\sigma}_z$ の基底に関して行列表示する:

$$\hat{\rho}^{\mathrm{I}}(t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\langle\hat{\sigma}_z\rangle & 2\langle\hat{\sigma}_-\rangle \\ 2\langle\hat{\sigma}_+\rangle & 1-\langle\hat{\sigma}_z\rangle \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

ここで

$$\langle\hat{\sigma}_+\rangle:=\mathrm{tr}[\hat{\sigma}_+\hat{\rho}^{\mathrm{I}}(t)],\ \langle\hat{\sigma}_-\rangle:=\mathrm{tr}[\hat{\sigma}_-\hat{\rho}^{\mathrm{I}}(t)],\ \langle\hat{\sigma}_z\rangle:=\mathrm{tr}[\hat{\sigma}_z\hat{\rho}^{\mathrm{I}}(t)] \tag{4.10}$$

であり，行列表示の $(1,1)$，$(1,2)$，$(2,1)$，$(2,2)$ 成分はそれぞれ $|1\rangle\langle 1|$，$|1\rangle\langle 0|$，$|0\rangle\langle 1|$，$|0\rangle\langle 0|$ の係数に対応している．この各行列成分に対して (4.8) を書き下すと，

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{\sigma}_+\rangle=-\frac{\gamma_0}{2}\langle\hat{\sigma}_+\rangle,\ \frac{d}{dt}\langle\hat{\sigma}_-\rangle=-\frac{\gamma_0}{2}\langle\hat{\sigma}_-\rangle,\ \frac{d}{dt}\langle\hat{\sigma}_z\rangle=-\gamma_0\langle\hat{\sigma}_z\rangle-\gamma_0 \tag{4.11}$$

となる．(4.11) はいずれも線形なので，容易に解ける．密度演算子の初期条件を

$$\hat{\rho}^{\mathrm{I}}(0)=\begin{bmatrix} a & b \\ b^* & 1-a \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

とすると，

$$\hat{\rho}^{\mathrm{I}}(t)=\begin{bmatrix} ae^{-\gamma_0 t} & be^{-\gamma_0 t/2} \\ b^*e^{-\gamma_0 t/2} & 1-ae^{-\gamma_0 t} \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

を得る．これは $t\to\infty$ の極限で基底状態 $|0\rangle\langle 0|$ に収束する．

この場合，励起状態にある原子が時刻 t までに光子を放出する確率は $p(t):=1-e^{-\gamma_0 t}$ である．そこで時刻 t までのダイナミクスを表すクラウス演算子を

$$\hat{M}_0(t):=\sqrt{1-p(t)}|1\rangle\langle 1|+|0\rangle\langle 0|,\ \hat{M}_1(t):=\sqrt{p(t)}\hat{\sigma}_- \tag{4.14}$$

とすると，行列表示で

$$\sum_{k=0,1}\hat{M}_k(t)\rho^{\mathrm{I}}(0)\hat{M}_k^\dagger(t)=\begin{bmatrix} a(1-p(t)) & b\sqrt{1-p(t)} \\ b^*\sqrt{1-p(t)} & 1-a(1-p(t)) \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

となる．これは量子マスター方程式の解 (4.13) と一致している．

4.2.2 位相緩和

原子が環境と相互作用して，励起状態と基底状態の重ね合わせの位相は乱されるが，エネルギーの放出や吸収はない場合を考える．ここで，位相攪乱は $\hat{\sigma}_z$ で記述される．実際，$\hat{\sigma}_z$ は $|0\rangle$ と $|1\rangle$ の相対位相を変化させるが，それら振幅の絶対値は変化させない．さて，微小時間 Δt の間に位相攪乱が $\gamma_{\mathrm{p}}\Delta t$ の確率で起こるとする．このとき，リンドブラッド演算子は $\hat{L}:=\sqrt{\gamma_{\mathrm{p}}}\hat{\sigma}_z$ で，量子マスター方程式は

$$\frac{d\hat{\rho}^{\mathrm{I}}}{dt}=\gamma_{\mathrm{p}}\left(\hat{\sigma}_z\hat{\rho}^{\mathrm{I}}\hat{\sigma}_z-\frac{1}{2}\{\hat{\sigma}_z^2,\hat{\rho}^{\mathrm{I}}\}\right)=\gamma_{\mathrm{p}}\left(\hat{\sigma}_z\hat{\rho}^{\mathrm{I}}\hat{\sigma}_z-\hat{\rho}^{\mathrm{I}}\right) \tag{4.16}$$

となる．これを行列表示すると，

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{\sigma}_+\rangle=-\gamma_{\mathrm{p}}\langle\hat{\sigma}_+\rangle,\ \frac{d}{dt}\langle\hat{\sigma}_-\rangle=-\gamma_{\mathrm{p}}\langle\hat{\sigma}_-\rangle,\ \frac{d}{dt}\langle\hat{\sigma}_z\rangle=0 \tag{4.17}$$

となる．これを初期条件 (4.12) について解析的に解くと

$$\hat{\rho}^{\mathrm{I}}(t) = \begin{bmatrix} a & be^{-\gamma_{\mathrm{p}}t} \\ b^* e^{-\gamma_{\mathrm{p}}t} & 1-a \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

となる．すなわち，対角成分は変わらずに，干渉項だけが消失していく．これは**位相緩和**（**dephasing**）と呼ばれる．

4.2.3 熱浴中の二準位原子

環境が逆温度 β の熱平衡状態にあるとする．この環境を熱浴と呼ぶ．このとき，原子は自然放出するだけではなく，熱浴から光子を吸って励起したり（**熱的励起**），熱浴にある光子の影響で光子放出のレートが増大する（**誘導放出**）．これらのプロセスは，以下に述べるように**詳細つり合い条件**（**detailed balance condition**）を満たす．

この場合の量子マスター方程式は

$$\frac{d\hat{\rho}^{\mathrm{I}}}{dt} = \gamma_0 \left[N(\omega_0)+1\right] \left[\hat{\sigma}_- \hat{\rho}^{\mathrm{I}} \hat{\sigma}_+ - \frac{1}{2}\{\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-, \hat{\rho}^{\mathrm{I}}\}\right] + \gamma_0 N(\omega_0) \left[\hat{\sigma}_+ \hat{\rho}^{\mathrm{I}} \sigma_- - \frac{1}{2}\{\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+, \hat{\rho}^{\mathrm{I}}\}\right] \tag{4.19}$$

で与えられる（この方程式のミクロな導出は 4.4.2 節で議論する）．ここで $N(\omega_0)$ は，以下で述べるように，定常状態が熱平衡状態（カノニカル分布）であるという条件から決まる定数である．とくに絶対零度極限 $\beta \to \infty$ では，環境は真空となる．このとき $N(\omega_0) \to 0$ なので，(4.19) は自然放出の場合 (4.8) に一致する．(4.19) と (4.8) を比べたとき，(4.19) には二つの項

$$\gamma_0 N(\omega_0) \left[\hat{\sigma}_- \hat{\rho}^{\mathrm{I}} \hat{\sigma}_+ - \frac{1}{2}\{\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-, \hat{\rho}^{\mathrm{I}}\}\right], \ \gamma_0 N(\omega_0) \left[\hat{\sigma}_+ \hat{\rho}^{\mathrm{I}} \sigma_- - \frac{1}{2}\{\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+, \hat{\rho}^{\mathrm{I}}\}\right] \tag{4.20}$$

が付け加わっている．前者は誘導放出，後者は熱的励起による誘導吸収に対応する．

量子マスター方程式 (4.19) も解析的に解くことができる．(4.19) を行列表示すると，

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{\sigma}_+\rangle = -\frac{\gamma}{2}\langle\hat{\sigma}_+\rangle, \ \frac{d}{dt}\langle\hat{\sigma}_-\rangle = -\frac{\gamma}{2}\langle\hat{\sigma}_-\rangle, \ \frac{d}{dt}\langle\hat{\sigma}_z\rangle = -\gamma\langle\hat{\sigma}_z\rangle - \gamma_0 \tag{4.21}$$

となる．ここで $\gamma := \gamma_0(2N(\omega_0)+1)$ とおいた．密度演算子の初期条件を (4.12) とすると

$$\hat{\rho}^{\mathrm{I}}(t) = \begin{bmatrix} (a-a_{\mathrm{s}})e^{-\gamma t} + a_{\mathrm{s}} & be^{-\gamma t/2} \\ b^* e^{-\gamma t/2} & 1 - a_{\mathrm{s}} - (a-a_{\mathrm{s}})e^{-\gamma t} \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

を得る．ここで

$$a_{\mathrm{s}} := \frac{N(\omega_0)}{2N(\omega_0)+1} \tag{4.23}$$

とおいた．$t \to \infty$ の極限で

$$\hat{\rho}^{\mathrm{I}}(t) \to \begin{bmatrix} a_{\mathrm{s}} & 0 \\ 0 & 1-a_{\mathrm{s}} \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

となる．これがカノニカル分布であるための条件は

$$\frac{a_{\mathrm{s}}}{1-a_{\mathrm{s}}} = e^{-\beta\hbar\omega_0} \tag{4.25}$$

である．これを (4.23) と比較すると，$N(\omega_0)$ が

$$N(\omega_0) = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_0} - 1} \tag{4.26}$$

で与えられることが分かる．これは，逆温度 β の黒体輻射の周波数が ω_0 成分の平均光子数である．

なお，密度演算子の対角成分だけで閉じた方程式を導くことができる．$p_1 := \langle 1|\hat{\rho}^{\mathrm{I}}|1\rangle$, $p_0 := \langle 0|\hat{\rho}^{\mathrm{I}}|0\rangle$ とすると

$$\frac{dp_1}{dt} = -\gamma_0(N(\omega_0)+1)p_1 + \gamma_0 N(\omega_0)p_0,\ \ \frac{dp_0}{dt} = -\gamma_0(N(\omega_0)+1)p_1 - \gamma_0 N(\omega_0)p_0 \tag{4.27}$$

となる．これは古典的な二準位系が従うマスター方程式と同じ形であることが確かめられる．ここで $|0\rangle$ と $|1\rangle$ の間の遷移確率は，(4.26) より

$$\frac{N(\omega_0)}{N(\omega_0)+1} = e^{-\beta\hbar\omega_0} \tag{4.28}$$

を満たしており，これは B.1.1 節で議論する詳細つり合いの条件 (B.4) そのものである．

4.3 ミクロなダイナミクスからの導出

次に，システムと熱浴（環境）の合成系のフォンノイマン方程式から出発して，ミクロなダイナミクスに基づいて系統的な近似によって，量子マスター方程式を導出することを考えよう．システムのハミルトニアンを $\hat{H}_{\mathrm{S}}$，環境のハミルトニアンを $\hat{H}_{\mathrm{B}}$，両者の相互作用ハミルトニアンを $\hat{H}_{\mathrm{int}}$ とする．全系のハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\mathrm{tot}} = \hat{H}_{\mathrm{S}} \otimes \hat{I}_{\mathrm{B}} + \hat{H}_{\mathrm{int}} + \hat{I}_{\mathrm{S}} \otimes \hat{H}_{\mathrm{B}} \tag{4.29}$$

である．ここで，$\hat{I}_{\mathrm{S}}$ はシステムの単位演算子，$\hat{I}_{\mathrm{B}}$ は熱浴の単位演算子である．$\hat{\rho}_{\mathrm{tot}}$ を全系の密度演算子とすると，

$$\frac{d\hat{\rho}_{\mathrm{tot}}(t)}{dt} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H}_{\mathrm{tot}}, \hat{\rho}_{\mathrm{tot}}(t)] \tag{4.30}$$

が成り立つ．この解 $\hat{\rho}_{\mathrm{tot}}(t)$ に対応して，システムの密度演算子を

$$\hat{\rho}(t) := \mathrm{tr}_{\mathrm{B}}[\hat{\rho}_{\mathrm{tot}}(t)] \tag{4.31}$$

とおく．

ここで自由ハミルトニアンを $\hat{H}_0 := \hat{H}_{\mathrm{S}} \otimes \hat{I}_{\mathrm{B}} + \hat{I}_{\mathrm{S}} \otimes \hat{H}_{\mathrm{B}}$ とおき，それに関して時刻 0 を基準とした相互作用表示を導入する．相互作用表示のハミルトニアンと密度演算子は，それぞれ

$$\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(t) := e^{\mathrm{i}\hat{H}_0 t/\hbar}\hat{H}_{\mathrm{int}}e^{-\mathrm{i}\hat{H}_0 t/\hbar} \tag{4.32}$$

$$\hat{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{tot}}(t) := e^{\mathrm{i}\hat{H}_0 t/\hbar}\hat{\rho}_{\mathrm{tot}}(t)e^{-\mathrm{i}\hat{H}_0 t/\hbar} \tag{4.33}$$

となる．ここで，相互作用表示の演算子であることを明示するために，上付き記号 $^{\mathrm{I}}$ を付けた．対応する時間発展方程式は

$$\frac{d\hat{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{tot}}(t)}{dt} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(t), \hat{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{tot}}(t)] \tag{4.34}$$

である．

さて，$\hat{\rho}(t)$ に関する量子マスター方程式を導出するために，いくつかの仮定が必要である．まず，初期状態について次の仮定をする．

初期状態．$t = 0$ において，システムと環境は相関をもたない:

$$\hat{\rho}_{\mathrm{tot}}(0) = \hat{\rho}(0) \otimes \hat{\rho}_{\mathrm{B}}. \tag{4.35}$$

さらに，簡単のために以下の仮定をおく．

相互作用と環境の性質．相互作用ハミルトニアン，環境のハミルトニアン，環境の初期状態は，以下の性質を満たすものとする:

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{B}}[\hat{H}_{\mathrm{int}}\hat{\rho}_{\mathrm{B}}] = 0,\ \mathrm{tr}_{\mathrm{B}}[\hat{H}_{\mathrm{B}}\hat{\rho}_{\mathrm{B}}] = 0,\ [\hat{H}_{\mathrm{B}}, \hat{\rho}_{\mathrm{B}}] = 0. \tag{4.36}$$

前者の二つは，ハミルトニアンに適当な定数を加えれば満たされる．三つ目は，たとえば環境の初期状態 $\hat{\rho}_{\mathrm{B}}$ が $\hat{H}_{\mathrm{B}}$ についてのカノニカル分布なら満たされる．

(4.34) の右辺を形式的に積分すると

$$\hat{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{tot}}(t) = \hat{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{tot}}(0) - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t ds[\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(s), \hat{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{tot}}(s)] \tag{4.37}$$

が得られる．これをもう一度 (4.34) に代入すると

$$\frac{d\hat{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{tot}}(t)}{dt} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(t), \hat{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{tot}}(0)] - \frac{1}{\hbar^2}\int_0^t ds[\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(t), [\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(s), \hat{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{tot}}(s)]] \tag{4.38}$$

が得られる．この両辺を環境についてトレースをとることで

$$\frac{d\hat{\rho}^{\mathrm{I}}(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t ds \mathrm{tr}_{\mathrm{B}}\left[[\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(t), [\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(s), \hat{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{tot}}(s)]]\right] \tag{4.39}$$

を得る．ここで仮定 (4.36) の一つ目と三つ目を用いた．

リンドブラッド型の量子マスター方程式を得るために，(4.39) に対して以下のような近似をしていく．

ボルン近似．(4.39) の右辺の積分の中で，$\hat{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{tot}}(s)$ を以下のように近似する:

$$\hat{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{tot}}(s) \simeq \hat{\rho}^{\mathrm{I}}(s) \otimes \hat{\rho}_{\mathrm{B}} \tag{4.40}$$

ボルン近似により，(4.39) は

$$\frac{d\hat{\rho}^{\mathrm{I}}(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t ds \mathrm{tr}_{\mathrm{B}}\left[[\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(t), [\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(s), \hat{\rho}^{\mathrm{I}}(s) \otimes \hat{\rho}_{\mathrm{B}}]]\right] \tag{4.41}$$

と書ける．ここでさらに，次の近似をする．

マルコフ近似．(4.41) 式の右辺の積分の中で

$$\hat{\rho}^{\mathrm{I}}(s) \simeq \hat{\rho}^{\mathrm{I}}(t) \tag{4.42}$$

として，さらに積分の下端を $-\infty$ にする．

マルコフ近似により，(4.41) は

$$
\begin{aligned}
\frac{d\hat{\rho}^{\mathrm{I}}(t)}{dt} &= -\frac{1}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{t} ds \mathrm{tr}_{\mathrm{B}}\left[[\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(t),[\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(s),\hat{\rho}^{\mathrm{I}}(t)\otimes\hat{\rho}_{\mathrm{B}}]]\right] \\
&= -\frac{1}{\hbar^2}\int_{0}^{\infty} ds \mathrm{tr}_{\mathrm{B}}\left[[\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(t),[\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(t-s),\hat{\rho}^{\mathrm{I}}(t)\otimes\hat{\rho}_{\mathrm{B}}]]\right]
\end{aligned} \tag{4.43}
$$

となる．一行目から二行目への変形で s を改めて $t-s$ とおいた．

さてここで，相互作用ハミルトニアンが

$$
\hat{H}_{\mathrm{int}} = \sum_k \left[\hat{L}_k \otimes \hat{E}_k^\dagger + \hat{L}_k^\dagger \otimes \hat{E}_k\right] \tag{4.44}
$$

という形で書けると仮定する．$\hat{L}_k$ と $\hat{E}_k$ はそれぞれシステムと熱浴の演算子である．さらに，$\hat{L}_k$ は適当な周波数 ω_k（>0）を用いて

$$
[\hat{H}_{\mathrm{S}}, \hat{L}_k] = -\hbar\omega_k \hat{L}_k, \ [\hat{H}_{\mathrm{S}}, \hat{L}_k^\dagger] = \hbar\omega_k \hat{L}_k^\dagger \tag{4.45}
$$

という交換関係を満たすと仮定する．このとき，$\hat{L}_k$ の相互作用表示は

$$
\hat{L}_k^{\mathrm{I}}(t) = e^{-\mathrm{i}\omega_k t}\hat{L}_k, \quad \hat{L}_k^{\mathrm{I}\dagger}(t) = e^{\mathrm{i}\omega_k t}\hat{L}_k^\dagger \tag{4.46}
$$

となる．なお，簡単のために $k \neq l$ のとき $\omega_k \neq \omega_l$ とする．また，$\mathrm{tr}[\hat{E}_k\hat{\rho}_{\mathrm{B}}]=0$ を仮定しておく．これは (4.36) の一つ目の仮定が成立するための十分条件である．4.4 節と 4.5 節で見るように，以上のような仮定を満たす相互作用ハミルトニアンは色々な応用をもつ．このとき，相互作用ハミルトニアンの相互作用表示は

$$
\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(t) = \sum_k \left[e^{-\mathrm{i}\omega_k t}\hat{L}_k \otimes \hat{E}_k^{\mathrm{I}\dagger}(t) + e^{\mathrm{i}\omega_k t}\hat{L}_k^\dagger \otimes \hat{E}_k^{\mathrm{I}}(t)\right] \tag{4.47}
$$

となる．

ここで環境の演算子の相関関数を

$$
\begin{aligned}
\langle \hat{E}_k^{\mathrm{I}}(s)\hat{E}_k^{\mathrm{I}\dagger}(0)\rangle &:= \mathrm{tr}[\hat{E}_k^{\mathrm{I}}(s)\hat{E}_k^{\mathrm{I}\dagger}(0)\hat{\rho}_{\mathrm{B}}] \\
\langle \hat{E}_k^{\mathrm{I}\dagger}(0)\hat{E}_k^{\mathrm{I}}(s)\rangle &:= \mathrm{tr}[\hat{E}_k^{\mathrm{I}\dagger}(0)\hat{E}_k(s)\hat{\rho}_{\mathrm{B}}]
\end{aligned} \tag{4.48}
$$

と定義する．仮定 $[\hat{H}_{\mathrm{B}}, \hat{\rho}_{\mathrm{B}}]=0$ より，これらは

$$
\begin{aligned}
\langle \hat{E}_k^{\mathrm{I}}(s)\hat{E}_k^{\mathrm{I}\dagger}(0)\rangle = \langle \hat{E}_k^{\mathrm{I}}(0)\hat{E}_k^{\mathrm{I}\dagger}(-s)\rangle = \langle \hat{E}_k^{\mathrm{I}}(t)\hat{E}_k^{\mathrm{I}\dagger}(t-s)\rangle, \\
\langle \hat{E}_k^{\mathrm{I}\dagger}(0)\hat{E}_k^{\mathrm{I}}(s)\rangle = \langle \hat{E}_k^{\mathrm{I}\dagger}(-s)\hat{E}_k^{\mathrm{I}}(0)\rangle = \langle \hat{E}_k^{\mathrm{I}\dagger}(t-s)\hat{E}_k(t)\rangle
\end{aligned} \tag{4.49}
$$

を満たす．(4.47) を (4.43) に代入して，相関関数の定義を用いると，たとえば

$$
\frac{1}{\hbar^2}\sum_{kl} e^{-\mathrm{i}(\omega_k-\omega_l)t}\int_0^\infty ds e^{\mathrm{i}\omega_k s}\langle E_k^{\mathrm{I}\dagger}(t-s)\hat{E}_l^{\mathrm{I}}(t)\rangle \hat{L}_k\hat{\rho}\hat{L}_l^\dagger \tag{4.50}
$$

のような形の項を多く含んだ煩雑な式が得られる．そこで，さらに以下の近似を行う:

回転波近似（rotating wave approximation）． 注目している時間スケールに比べて，$|\omega_k-\omega_l|^{-1}$（$k\neq l$）が十分小さいと仮定する．このとき，$e^{\pm\mathrm{i}(\omega_k+\omega_l)t}$ や $e^{\pm\mathrm{i}(\omega_k-\omega_l)t}$（$k \neq l$）の形の項は激しく振動するので，注目している時間スケールでは平均化されてゼロになると考える．

たとえば (4.50) に対してこの近似を行うと，$k=l$ の項だけが残るので，

$$\frac{1}{\hbar^2}\sum_k \int_0^\infty ds e^{i\omega_k s}\langle E_k^{I\dagger}(t-s)\hat{E}_k^I(t)\rangle \hat{L}_k\hat{\rho}\hat{L}_k^\dagger \tag{4.51}$$

が得られる．ここで相関関数のラプラス・フーリエ変換を

$$\begin{aligned}\Gamma_{k-} &:= \frac{1}{\hbar^2}\int_0^\infty ds e^{i\omega_k s}\langle \hat{E}_k^I(s)\hat{E}_k^{I\dagger}(0)\rangle,\\ \Gamma_{k+} &:= \frac{1}{\hbar^2}\int_0^\infty ds e^{i\omega_k s}\langle \hat{E}_k^{I\dagger}(0)\hat{E}_k^I(s)\rangle\end{aligned} \tag{4.52}$$

と定義すると，回転波近似のもとで (4.43) は

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\rho}^I(t)}{dt} = &\sum_k \left[(\Gamma_{k-}+\Gamma_{k-}^*)\hat{L}_k\hat{\rho}^I(t)\hat{L}_k^\dagger - \Gamma_{k-}\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k\rho^I(t) - \Gamma_{k-}^*\rho^I(t)\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k\right]\\ &+\sum_k \left[(\Gamma_{k+}+\Gamma_{k+}^*)\hat{L}_k^\dagger\hat{\rho}^I(t)\hat{L}_k - \Gamma_{k+}^*\hat{L}_k\hat{L}_k^\dagger\rho^I(t) - \Gamma_{k+}\rho^I(t)\hat{L}_k\hat{L}_k^\dagger\right]\end{aligned} \tag{4.53}$$

となることが分かる．さらに $\Gamma_{k\pm}$ を

$$\Gamma_{k\pm} = \frac{1}{2}\gamma_{k\pm} + iS_{k\pm} \tag{4.54}$$

のように実部と虚部に分ける．また

$$\hat{H}_{LS} := \hbar\sum_k \left[S_{k-}\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k - S_{k+}\hat{L}_k\hat{L}_k^\dagger\right] \tag{4.55}$$

というハミルトニアンを定義しよう．以上により，(4.53) は

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\rho}^I(t)}{dt} = &-\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_{LS},\hat{\rho}^I(t)]\\ &+\sum_k \gamma_{k-}\left[\hat{L}_k\hat{\rho}^I(t)\hat{L}_k^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k,\rho^I(t)\}\right]\\ &+\sum_k \gamma_{k+}\left[\hat{L}_k^\dagger\hat{\rho}^I(t)\hat{L}_k - \frac{1}{2}\{\hat{L}_k\hat{L}_k^\dagger,\rho^I(t)\}\right]\end{aligned} \tag{4.56}$$

となる．こうして求めたいリンドブラッド型の量子マスター方程式が得られた．

(4.56) の右辺第一項は，環境の影響で新たにユニタリ発展が生じたことを意味している．交換関係 (4.45) より，

$$[\hat{H}_{LS},\hat{H}_S] = 0 \tag{4.57}$$

が成り立つ．したがって，システムのハミルトニアン $\hat{H}_S$ のエネルギー準位が，環境の影響で $\hat{H}_{LS}$ の分だけシフトしたとみなすことができる．電磁場中の原子の場合は，これはラムシフト（Lamb shift）として知られている現象である．$\hat{H}_{LS}$ をそのまま計算すると発散するため，物理的に意味のある値を得るにはくりこみを要する．その結果として得られる $\hat{H}_{LS}$ は，$\hat{H}_S$ に比べて小さく無視できることが多い．また，くりこみの計算は本書の範囲を超える．そこで以下では，簡単のため $\hat{H}_{LS}$ の項を無視することにする．

また，$\gamma_{k\pm}$ は環境との相互作用の強さを特徴づける散逸係数であり，

$$\begin{aligned}\gamma_{k-} &= \frac{1}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{i\omega_k s}\langle \hat{E}_k^I(s)\hat{E}_k^{I\dagger}(0)\rangle,\\ \gamma_{k+} &= \frac{1}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{i\omega_k s}\langle \hat{E}_k^{I\dagger}(0)\hat{E}_k^I(s)\rangle\end{aligned} \tag{4.58}$$

と書くことができる．これは散逸係数が環境の相関関数のフーリエ変換で書けることを意味しており，第二種揺動散逸定理の一種とみなすことができる．なお，(4.56) がリンドブラッド型であるためには，$\gamma_{k\pm}$ が非負でなければならない．これは次のようにして示すことができる．環境のハミルトニアンと密度演算子のスペクトル分解をそれぞれ $\hat{H}_{\mathrm{B}} = \sum_i \hbar\omega_i^{\mathrm{B}} |\Phi_i\rangle\langle\Phi_i|$，$\hat{\rho}_{\mathrm{B}} = \sum_i q_i |\Phi_i\rangle\langle\Phi_i|$ とする（仮定より両者は可換なので，同じ基底で対角化できる）．このとき，

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} ds e^{\mathrm{i}\omega_k s} \langle \hat{E}_k^{\mathrm{I}}(s) \hat{E}_k^{\mathrm{I}\dagger}(0) \rangle &= \sum_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{\mathrm{i}(\omega_k + \omega_j^{\mathrm{B}} - \omega_i^{\mathrm{B}})s} |\langle \Phi_j | \hat{E}_k | \Phi_i \rangle|^2 q_j \\
&= 2\pi \sum_{kl} \delta(\omega_k + \omega_j^{\mathrm{B}} - \omega_i^{\mathrm{B}}) |\langle \Phi_j | \hat{E}_k | \Phi_i \rangle|^2 q_j \\
&\geq 0
\end{aligned}
\tag{4.59}
$$

から $\gamma_{k-} \geq 0$ が分かる．$\gamma_{k+} \geq 0$ も同様にして分かる．

対角成分のマスター方程式

さて，量子マスター方程式 (4.56) に従う密度演算子のエネルギー基底での対角成分が，付録 B.1.1 で議論する古典マスター方程式に従うことを示す．システムのハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{S}}$ に縮退はないと仮定する．このスペクトル分解を $\hat{H}_{\mathrm{S}} = \sum_n E_n |E_n\rangle\langle E_n|$（$m \neq n$ のとき $E_m \neq E_n$）とする．このとき，交換関係 (4.45) の両辺を $\langle E_n| \cdots |E_m\rangle$ ではさむことにより，

$$
\begin{aligned}
(E_n - E_m + \hbar\omega_k)\langle E_n | \hat{L}_k | E_m \rangle &= 0, \\
(E_n - E_m - \hbar\omega_k)\langle E_n | \hat{L}_k^\dagger | E_m \rangle &= 0
\end{aligned}
\tag{4.60}
$$

が得られる．すなわち，$\langle E_n | \hat{L}_k | E_m \rangle$ は $E_n - E_m = -\hbar\omega_k$ のとき（システムのエネルギーが $\hbar\omega_k$ だけ減少するとき）だけゼロでない値をとり，$\langle E_n | \hat{L}_k^\dagger | E_m \rangle$ は $E_n - E_m = \hbar\omega_k$ のとき（システムのエネルギーが $\hbar\omega_k$ だけ増加するとき）だけゼロでない値をとる．仮定により $\hat{H}_{\mathrm{S}}$ に縮退がないので，$\langle E_n | \hat{L}_k | E_m \rangle$ や $\langle E_n | \hat{L}_k^\dagger | E_m \rangle$ はそれぞれ，ある一つの (m, n) の組だけでゼロでない値をとる．これらに対応して，

$$
\begin{aligned}
P_{k-}(n|m) &:= \gamma_{k-} |\langle E_n | \hat{L}_k | E_m \rangle|^2, \\
P_{k+}(n|m) &:= \gamma_{k+} |\langle E_n | \hat{L}_k^\dagger | E_m \rangle|^2
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

という遷移レートを定義する．さらに

$$
P(n|m) := \sum_k [P_{k-}(n|m) + P_{k+}(n|m)] \tag{4.62}
$$

とおく．また，エネルギー基底に関する密度演算子の対角成分を

$$
P(n;t) := \langle E_n | \hat{\rho}^{\mathrm{I}}(t) | E_n \rangle \tag{4.63}
$$

と書くことにしよう．このとき，以上の議論と量子マスター方程式 (4.56) より

$$
\frac{dP_n(t)}{dt} = \sum_m [P(n|m)P(m;t) - P(m|n)P(n;t)] \tag{4.64}
$$

が成り立つことが分かる．すなわち，対角成分に関して閉じた古典マスター方程式が得ら

れる．

熱平衡の環境との相互作用

特別な場合として，環境が熱平衡状態にあり，その密度演算子がカノニカル分布である場合を考えよう:

$$\hat{\rho}_{\mathrm{B}} = \exp\left(\beta(F_{\mathrm{B}} - \hat{H}_{\mathrm{B}})\right). \tag{4.65}$$

ここで $\beta := (k_{\mathrm{B}}T)^{-1}$ は環境の逆温度である（k_{B} はボルツマン定数，T は温度）．また，F_{B} は環境の自由エネルギーで，

$$F_{\mathrm{B}} := -\beta^{-1}\ln \mathrm{tr}_{\mathrm{B}}\left[e^{-\beta\hat{H}_{\mathrm{B}}}\right] \tag{4.66}$$

と定義される．このとき，次の **KMS**（**Kubo-Martin-Schwinger**）条件が成立する:

$$\langle \hat{E}_k^{\mathrm{I}}(s)\hat{E}_k^{\mathrm{I}\dagger}(0)\rangle = \langle \hat{E}_k^{\mathrm{I}\dagger}(0)\hat{E}_k^{\mathrm{I}}(s+\mathrm{i}\beta\hbar)\rangle. \tag{4.67}$$

実際，これは

$$\mathrm{tr}[e^{\mathrm{i}\hat{H}_{\mathrm{B}}s/\hbar}\hat{E}_k e^{-\mathrm{i}\hat{H}_{\mathrm{B}}s/\hbar}\hat{E}_k^{\dagger}e^{\beta(F_{\mathrm{B}}-\hat{H}_{\mathrm{B}})}] = \mathrm{tr}[\hat{E}_k^{\dagger}e^{-\beta\hat{H}_{\mathrm{B}}}e^{\mathrm{i}\hat{H}_{\mathrm{B}}s/\hbar}\hat{E}_k e^{-\mathrm{i}\hat{H}_{\mathrm{B}}s/\hbar}e^{\beta\hat{H}_{\mathrm{B}}}e^{\beta(F_{\mathrm{B}}-\hat{H}_{\mathrm{B}})}] \tag{4.68}$$

と示すことができる．KMS 条件より

$$\begin{aligned}\frac{1}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{\mathrm{i}\omega_k s}\langle \hat{E}_k^{\mathrm{I}}(s)\hat{E}_k^{\mathrm{I}\dagger}(0)\rangle &= \frac{1}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{\mathrm{i}\omega_k s}\langle \hat{E}_k^{\mathrm{I}\dagger}(0)\hat{E}_k^{\mathrm{I}}(s+\mathrm{i}\beta\hbar)\rangle \\ &= \frac{1}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{+\infty} ds' e^{\mathrm{i}\omega_k(s'-\mathrm{i}\beta\hbar)}\langle \hat{E}_k^{\mathrm{I}\dagger}(0)\hat{E}_k^{\mathrm{I}}(s')\rangle \\ &= \frac{e^{\beta\hbar\omega_k}}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{+\infty} ds' e^{\mathrm{i}\omega_k s'}\langle \hat{E}_k^{\mathrm{I}\dagger}(0)\hat{E}_k^{\mathrm{I}}(s')\rangle\end{aligned} \tag{4.69}$$

となり，したがって

$$\gamma_{k-} = e^{\beta\hbar\omega_k}\gamma_{k+} \tag{4.70}$$

が成り立つ．これは量子マスター方程式における詳細つり合い条件とみなすことができる．実際，ここから

$$P_{k-}(n|m) = e^{\beta\hbar\omega_k}P_{k+}(m|n) \tag{4.71}$$

が得られる．これは古典マスター方程式における詳細つり合いの条件そのものである[*2]．

さて，システムのカノニカル分布は

$$\hat{\rho}_{\mathrm{can}} := \exp\left(\beta(F_{\mathrm{S}} - \hat{H}_{\mathrm{S}})\right) \tag{4.72}$$

である．ここで

$$F_{\mathrm{S}} = -\beta^{-1}\ln \mathrm{tr}_{\mathrm{S}}\left[e^{-\beta\hat{H}_{\mathrm{S}}}\right] \tag{4.73}$$

はシステムの自由エネルギーである．このとき，交換関係 (4.45) より

$$\begin{aligned}\hat{L}_k\hat{\rho}_{\mathrm{can}}\hat{L}_k^{\dagger} &= e^{\beta\hbar\omega_k}\hat{L}_k\hat{L}_k^{\dagger}\hat{\rho}_{\mathrm{can}} = e^{\beta\hbar\omega_k}\hat{\rho}_{\mathrm{can}}\hat{L}_k\hat{L}_k^{\dagger}, \\ \hat{L}_k^{\dagger}\hat{\rho}_{\mathrm{can}}\hat{L}_k &= e^{-\beta\hbar\omega_k}\hat{L}_k^{\dagger}\hat{L}_k\hat{\rho}_{\mathrm{can}} = e^{-\beta\hbar\omega_k}\hat{\rho}_{\mathrm{can}}\hat{L}_k^{\dagger}\hat{L}_k\end{aligned} \tag{4.74}$$

*2） B.1.1 節の (B.4) を参照.

が成り立つ．これと詳細つり合い条件 (4.70) より，$\hat{\rho}_{\mathrm{can}}$ は量子マスター方程式 (4.56) の定常解であることが分かる．すなわち，環境がカノニカル分布であれば，システムの定常状態もカノニカル分布になる．

4.4 電磁場中の量子系

具体例として，環境が電磁場の場合を考える．

4.4.1 一般論

まず，システムの詳細には依存しない一般的な議論をする．電磁場のある環境は三次元で，体積 V は有限とする．また，ゲージはクーロンゲージをとる．波数 $\vec{k}$ および直線偏光モード λ に対応する消滅演算子と生成演算子を，それぞれ $\hat{b}(\vec{k},\lambda)$ と $\hat{b}^\dagger(\vec{k},\lambda)$ とする*3)．これらは以下のような交換関係を満たす:

$$
\begin{aligned}
&[\hat{b}(\vec{k},\lambda),\hat{b}(\vec{k}',\lambda')]=0,\\
&[\hat{b}(\vec{k},\lambda),\hat{b}^\dagger(\vec{k}',\lambda')]=\delta_{\lambda,\lambda'}\delta_{\vec{k},\vec{k}'}.
\end{aligned}
\tag{4.75}
$$

電磁場のハミルトニアンは

$$
\hat{H}_{\mathrm{B}}=\sum_{\vec{k},\lambda}\hbar\omega_k\hat{b}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{b}(\vec{k},\lambda) \tag{4.76}
$$

である．ここで ω_k は周波数で，$\omega_k=c|\vec{k}|$ を満たす（c は光速度）．なお，零点エネルギーは以下の議論に影響を与えないので無視した*4)．

システムと電磁場の相互作用ハミルトニアンが，

$$
\hat{H}_{\mathrm{int}}=\hat{L}\otimes(\hat{B}+\hat{B}^\dagger)+\hat{L}^\dagger\otimes(\hat{B}+\hat{B}^\dagger) \tag{4.77}
$$

という形で書けるとする．$\hat{L}$ はシステムの演算子で，適当な周波数 ω_0 を用いて

$$
[\hat{H}_{\mathrm{S}},\hat{L}]=-\hbar\omega_0\hat{L},\ [\hat{H}_{\mathrm{S}},\hat{L}^\dagger]=\hbar\omega_0\hat{L}^\dagger \tag{4.78}
$$

という交換関係を満たすと仮定する．このとき，相互作用表示における演算子の時間発展は

$$
\hat{L}^{\mathrm{I}}(t)=e^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\hat{L},\quad \hat{L}^{\mathrm{I}\dagger}(t)=e^{\mathrm{i}\omega_0 t}\hat{L}^\dagger, \tag{4.79}
$$

となる．また，$\hat{B}$ は

$$
\hat{B}:=\mathrm{i}\sum_{\vec{k},\lambda}g(\vec{k},\lambda)\hat{b}(\vec{k},\lambda) \tag{4.80}
$$

と定義される電磁場の演算子である．ここで $g(\vec{k},\lambda)$ は，波数ベクトルと偏光の組 $(\vec{k},\lambda)$ で特徴づけられる電磁場のモードの相互作用の強さを表す．なお (4.77) は，4.3 節の (4.44)

*3) 直線偏光の方向はお互いに直交し，さらに波数ベクトルと直交する．波数ベクトルの方向を z 軸，偏光方向を x 軸，y 軸とすると，λ は x,y の二つの値をとるとみなせる．

*4) 電磁場の境界条件を変更する場合には，零点エネルギーの変化分が観測される．これをカシミール効果（Casimir effect）という．

において $\hat{E}=\hat{B}+\hat{B}^\dagger$ としたものに他ならない（添え字 k は省略した）．

ここで，環境の初期状態がカノニカル分布であるとする：

$$\hat{\rho}_B = \exp\left(\beta(F_\mathrm{B}-\hat{H}_\mathrm{B})\right). \tag{4.81}$$

このカノニカル分布に関する期待値を $\langle\cdots\rangle := \mathrm{tr}_\mathrm{B}[\cdots\hat{\rho}_\mathrm{B}]$ と書く．このとき，

$$\begin{aligned}
&\langle\hat{b}(\vec{k},\lambda)\hat{b}(\vec{k}',\lambda')\rangle = \langle\hat{b}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{b}^\dagger(\vec{k}',\lambda')\rangle = 0,\\
&\langle\hat{b}(\vec{k},\lambda)\hat{b}^\dagger(\vec{k}',\lambda')\rangle = \delta_{\lambda,\lambda'}\delta_{\vec{k},\vec{k}'}(1+N(\omega_k)),\\
&\langle\hat{b}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{b}(\vec{k}',\lambda')\rangle = \delta_{\lambda,\lambda'}\delta_{\vec{k},\vec{k}'}N(\omega_k)
\end{aligned} \tag{4.82}$$

が成立することは，生成消滅演算子の交換関係などを用いて，容易に確かめられる．ここで

$$N(\omega_k) := \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_k}-1} \tag{4.83}$$

とおいた．

相互作用表示では，生成消滅演算子の時間発展は

$$\hat{b}^\mathrm{I}(\vec{k},\lambda)(t) = \hat{b}(\vec{k},\lambda)e^{-\mathrm{i}\omega_k t},\ \hat{b}^{\mathrm{I}\dagger}(\vec{k},\lambda)(t) = \hat{b}^\dagger(\vec{k},\lambda)e^{\mathrm{i}\omega_k t} \tag{4.84}$$

となる．このことに注意して (4.82) を用いると，$\langle\hat{B}^\mathrm{I}(t)\hat{B}^\mathrm{I}(0)\rangle$ および $\langle\hat{B}^{\mathrm{I}\dagger}(t)\hat{B}^{\mathrm{I}\dagger}(0)\rangle$ はゼロで，$\langle\hat{B}^\mathrm{I}(s)\hat{B}^{\mathrm{I}\dagger}(0)\rangle$ および $\langle\hat{B}^{\mathrm{I}\dagger}(t)\hat{B}^\mathrm{I}(0)\rangle$ はゼロでない値をとることが分かる．これらの値を (4.82) などを使って計算すると，4.3 節の (4.58) で議論した散逸係数は

$$\begin{aligned}
\gamma_- &= \frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{\vec{k},\lambda}|g(\vec{k},\lambda)|^2(1+N(\omega_0))\delta(\omega_0-\omega_k)\\
&= g(\omega_0)(1+N(\omega_0))
\end{aligned} \tag{4.85}$$

となる．ここで

$$g(\omega_0) := \frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{\vec{k},\lambda}|g(\vec{k},\lambda)|^2\delta(\omega_0-\omega_k) \tag{4.86}$$

とおいた．同様に

$$\gamma_+ = g(\omega_0)N(\omega_0) \tag{4.87}$$

を得る．したがって量子マスター方程式は

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = g(\omega_0)\left[N(\omega_0)+1\right]\left[\hat{L}\hat{\rho}\hat{L}^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{L}^\dagger\hat{L},\hat{\rho}\}\right] + g(\omega_0)N(\omega_0)\left[\hat{L}^\dagger\hat{\rho}\hat{L} - \frac{1}{2}\{\hat{L}\hat{L}^\dagger,\hat{\rho}\}\right] \tag{4.88}$$

となることが分かる．ここで，右辺のうち $N(\omega_0)$ に比例する項が熱浴が有限温度である効果を表し，それ以外の項が真空ゆらぎの効果を表している．

なお，システムと電磁場の相互作用ハミルトニアンが，(4.77) のかわりに，それを回転波近似をした

$$\hat{H}_\mathrm{int} = \hat{L}\otimes\hat{B}^\dagger + \hat{L}^\dagger\otimes\hat{B} \tag{4.89}$$

の形で与えられるときも，得られる量子マスター方程式は (4.88) と同じ形になる．これは $\hat{E}=\hat{B}$ として 4.3 節の一般論を適用することで分かる．これが意味しているのは，相互

作用ハミルトニアンを直接回転波近似しても，量子マスター方程式を導出する段階で回転波近似しても，同じ結果が得られるということである．

4.4.2 自由空間中の二準位原子

4.4.1 節の一般論の特別な場合として，自由空間中の二準位原子を考えよう．この場合，システムのヒルベルト空間は二次元であり，$\hat{L}$ は

$$\hat{L} = \hat{\sigma}_-,\ \hat{L}^\dagger = \hat{\sigma}_+ \tag{4.90}$$

となる．(4.80) の $\hat{B}$ は

$$\hat{B} := -\mathrm{i}\vec{p}\cdot\sum_{\vec{k},\lambda}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}}\vec{e}(\vec{k},\lambda)\hat{b}(\vec{k},\lambda), \tag{4.91}$$

と書ける．すなわち，$g(\vec{k},\lambda)$ は

$$g(\vec{k},\lambda) := -\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}}\vec{p}\cdot\vec{e}(\vec{k},\lambda) \tag{4.92}$$

で与えられる．ここで，$\vec{p}$ は原子の分極ベクトル，$\vec{e}(\vec{k},\lambda)$ はモード $(\vec{k},\lambda)$ の偏光方向を表すベクトルであり，いずれも三次元実ベクトルである．$\lambda = x, y$ とすると，$\vec{e}(\vec{k},x)$ と $\vec{e}(\vec{k},y)$ は直交している．また，ゲージがクーロンゲージなので，これら二つの偏光ベクトルは $\vec{k}$ とも直交している．$\vec{k}$ の l 成分（$l = x, y, z$）を k_l，$\vec{e}(\vec{k},\lambda)$ の l 成分を $e_l(\vec{k},\lambda)$ とすると，

$$\sum_\lambda e_l(\vec{k},\lambda)e_{l'}(\vec{k},\lambda) + \frac{k_l k_{l'}}{|\vec{k}|^2} = \delta_{ll'} \tag{4.93}$$

が成立する．これは，三次元実空間の正規直交基底 $\{\vec{e}(\vec{k},x), \vec{e}(\vec{k},y), \vec{k}/|\vec{k}|\}$ の完全性条件に他ならない．また，二準位原子のエネルギーの差を ω_0 とすると，

$$\hat{\sigma}^{\mathrm{I}}_-(t) = e^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\hat{\sigma}_-,\ \ \hat{\sigma}^{\mathrm{I}}_+(t) = e^{\mathrm{i}\omega_0 t}\hat{\sigma}_+. \tag{4.94}$$

以上より，(4.86) は

$$\begin{aligned} g(\omega_0) &= \frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{\vec{k},\lambda}|g(\vec{k},\lambda)|^2\delta(\omega_0-\omega_k) \\ &= \frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{ll'}p_l p_{l'}\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}e_l(\vec{k},\lambda)e_{l'}(\vec{k},\lambda)\delta(\omega_0-\omega_k) \\ &= \frac{2\pi}{\hbar^2}\sum_{ll'}p_l p_{l'}\sum_{\vec{k}}\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}\left(\delta_{ll'} - \frac{k_l k_{l'}}{|\vec{k}|^2}\right)\delta(\omega_0-\omega_k) \end{aligned} \tag{4.95}$$

となることが分かる．ここで，環境の体積 V を無限大にする極限をとると，和が積分に置き換わる:

$$\frac{1}{V}\sum_{\vec{k}} \ \mapsto\ \int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} = \frac{1}{(2\pi c)^3}\int_0^\infty d\omega_k\omega_k^2\int d\Omega. \tag{4.96}$$

ここで Ω は波数空間の立体角である．簡単な計算により

$$\int d\Omega \left(\delta_{ll'} - \frac{k_l k_{l'}}{|\vec{k}|^2} \right) = \frac{8\pi}{3} \delta_{ll'} \tag{4.97}$$

が分かる．したがって，

$$g(\omega_0) = \frac{4\omega_0^3 |\vec{p}|^2}{3c^3 \hbar} =: \gamma_0 \tag{4.98}$$

を得る．これは自然放出レートに他ならない．

以上により，電磁場中の二準位原子の量子マスター方程式は，

$$\frac{d\hat{\rho}^{\mathrm{I}}}{dt} = \gamma_0 \left[N(\omega_0) + 1 \right] \left[\hat{\sigma}_- \hat{\rho}^{\mathrm{I}} \hat{\sigma}_+ - \frac{1}{2} \{ \hat{\sigma}_+ \sigma_-, \hat{\rho}^{\mathrm{I}} \} \right] + \gamma_0 N(\omega_0) \left[\hat{\sigma}_+ \hat{\rho}^{\mathrm{I}} \sigma_- - \frac{1}{2} \{ \hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+, \hat{\rho}^{\mathrm{I}} \} \right] \tag{4.99}$$

となることが分かる．これは，4.2.3 節で現象論的に議論した量子マスター方程式 (4.19) と一致している．ここでのハミルトニアンを使った導出の利点は，自然放出レート γ_0 を (4.98) のように具体的に計算できる点である．なお，環境が真空状態の場合は $N(\omega_0) = 0$ とおけばよい．

4.4.3 スクイズされた真空への放出

次に，環境がスクイズされた真空（squeezed vacuum）の場合に，その中にある二準位原子のダイナミクスを考える．電磁場と原子の相互作用は，4.4.2 節と同じとする．電磁場のスクイズ演算子を

$$\hat{S} := \prod_{\vec{k}, \lambda} \hat{S}_{\vec{k}, \lambda}(\xi), \tag{4.100}$$

$$\hat{S}_{\vec{k}, \lambda}(\xi) := \exp \left(\frac{\xi^* \hat{b}(\vec{k}, \lambda)^2 - \xi \hat{b}^\dagger(\vec{k}, \lambda)^2}{2} \right) \tag{4.101}$$

とする（詳細は B.1.2 節を参照）．これはユニタリ演算子であり，$\xi := re^{\mathrm{i}\theta}$ はスクイジングの強さと方向を決めるパラメータである．厳密には，スクイジングの強さは ω_k に依存するはずだが，結果的に $\omega_k = \omega_0$ での ξ の値しか結果に効かないので，この依存性は陽には考えないことにする．このスクイズ演算子を用いると，生成演算子は

$$\hat{S}_{\vec{k}, \lambda}(\xi) \hat{b}(\vec{k}, \lambda) \hat{S}^\dagger_{\vec{k}, \lambda}(\xi) = \hat{b}(\vec{k}, \lambda) \cosh r - \hat{b}^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{\mathrm{i}\theta} \sinh r \tag{4.102}$$

と変換される（B.1.2 節を参照）．スクイズ演算子を真空 $|0\rangle$ に作用させた状態を $|S\rangle := \hat{S}|0\rangle$ として，$\hat{\rho}_{\mathrm{B}} := |S\rangle\langle S|$ を環境の初期状態とする．

この状況に対して 4.3 節や 4.4.1 節の一般論を適用するには，いくつか困難がある．まず，(4.36) の $[\hat{H}_B, \hat{\rho}_{\mathrm{B}}] = 0$ という仮定が満たされていない．また，$\langle S|\hat{B}^{\mathrm{I}\dagger}(t)\hat{B}^{\mathrm{I}}(0)|S\rangle$，$\langle S|\hat{B}^{\mathrm{I}}(t)\hat{B}^{\mathrm{I}\dagger}(0)|S\rangle$，$\langle S|\hat{B}^{\mathrm{I}}(t)\hat{B}^{\mathrm{I}}(0)|S\rangle$，$\langle S|\hat{B}^{\mathrm{I}\dagger}(t)\hat{B}^{\mathrm{I}\dagger}(0)|S\rangle$ という四つの相関関数を計算する必要があるが，これらを直接計算することは面倒である．しかし，以下のように考えれば，これらの困難をともに解決し，比較的簡単に結果を得ることができる．

(4.43) などで環境についてのトレースをとる際に，環境の状態 $|S\rangle$ を真空 $|0\rangle$ に置き換え，$\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(t)$ を $\hat{S}^\dagger \hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(t) \hat{S}$ に置き換えても，等価な結果を得ることができる．さらに，$\hat{S}^\dagger \hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(t) \hat{S}$ は，$\hat{S}^\dagger \hat{H}_{\mathrm{int}} \hat{S}$ を相互作用表示したときの時刻 t の値と同じである．したがって，相互作用ハミルトニアンを $\hat{S}^\dagger \hat{H}_{\mathrm{int}} \hat{S}$ で置き換えて，環境が真空だとして，4.4.1 節の

議論を適用すればよい．

$$\begin{aligned}\hat{S}^\dagger \hat{H}_{\rm int} \hat{S} &= \hat{\sigma}_+ \hat{S}^\dagger \hat{B} \hat{S} + \hat{\sigma}_- \hat{S}^\dagger \hat{B}^\dagger \hat{S} \\ &= \hat{\sigma}_+ (\hat{B} \cosh r - \hat{B}^\dagger e^{{\rm i}\theta} \sinh r) + \hat{\sigma}_- (\hat{B}^\dagger \cosh r - \hat{B} e^{-{\rm i}\theta} \sinh r) \\ &= (\hat{\sigma}_+ \cosh r - \hat{\sigma}_- e^{-{\rm i}\theta} \sinh r) \hat{B} + (\hat{\sigma}_- \cosh r - \hat{\sigma}_+ e^{{\rm i}\theta} \sinh r) \hat{B}^\dagger\end{aligned} \tag{4.103}$$

なので，結局，(4.77) の $\hat{L}$ として

$$\hat{L} = \hat{\sigma}_- \cosh r - \hat{\sigma}_+ e^{{\rm i}\theta} \sinh r \tag{4.104}$$

をとればいいことが分かる．この $\hat{L}$ を用いて，量子マスター方程式は

$$\frac{d\hat{\rho}^{\rm I}}{dt} = \gamma_0 \left[\hat{L} \hat{\rho}^{\rm I} \hat{L}^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{L}^\dagger \hat{L}, \hat{\rho}^{\rm I} \} \right] \tag{4.105}$$

と書ける．ここで (4.9) と同様に $\hat{\rho}^{\rm I}(t)$ を行列表示すると，各成分に対するマスター方程式は

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt} \langle \hat{\sigma}_x \rangle = -\frac{\gamma_0}{2} e^{-2r} \langle \hat{\sigma}_x \rangle, \ \frac{d}{dt} \langle \hat{\sigma}_y \rangle = -\frac{\gamma_0}{2} e^{2r} \langle \hat{\sigma}_y \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle \hat{\sigma}_z \rangle = -\gamma_0 (2 \sinh^2 r + 1) \langle \hat{\sigma}_z \rangle + \gamma_0\end{gathered} \tag{4.106}$$

となる．すなわち，スクイズされた環境下での原子の光子放出レートは，自然放出レート γ_0 に比べて $(2\sinh^2 r + 1)$ 倍に増大することが分かる．

4.4.4　キャビティ内の光子

次に，一次元キャビティの中に閉じ込められた光子を考える（キャビティの詳細については A.2 節を参照）．この光子がキャビティ外の自由空間にロスするときに，キャビティ内の光子についての量子マスター方程式を導こう．図 4.2 に示すように，キャビティ内の光子は片側のミラーからロスして減衰するものとする．簡単のためにキャビティ内の光子は単一モードであるとして，そのハミルトニアンを $H_{\rm S} = \hbar\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a}$ とする．また，キャビティの外の環境は，一次元の電磁場として，そのハミルトニアンを $\hat{H}_{\rm B} = \sum_{k,\lambda} \hbar\omega_k \hat{b}^\dagger(k,\lambda) \hat{b}(k,\lambda)$ とする．相互作用ハミルトニアンは $\hat{H}_{\rm int} = \hat{a}^\dagger \hat{B} + \hat{a} \hat{B}^\dagger$，ここで $\hat{B} = {\rm i} \sum_{k,\lambda} g(k,\lambda) \hat{b}(k,\lambda)$，$g(k,\lambda) = \hbar\sqrt{c\kappa/4\pi}$ とする．κ はキャビティからのロスのレートを表すパラメータで，κ^{-1} がキャビティの Q 値に対応する．

この設定には，(4.89) において $\hat{L} = \hat{a}$ として，4.4.1 節の一般論を適用することができる．(4.86) の $g(\omega_0)$ は

$$g(\omega_0) = \frac{2\pi}{\hbar^2} \cdot 2 \int \frac{d\omega}{c} \frac{\hbar^2 c\kappa}{4\pi} \delta(\omega_0 - \omega) = \kappa \tag{4.107}$$

となる．ここで和を積分に置き換えた: $\sum_k \to \int dk = \int \frac{d\omega}{c}$．したがって，量子マスター方程式は

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \kappa \left[N(\omega_0) + 1 \right] \left[\hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho} \} \right] + \kappa N(\omega_0) \left[\hat{a}^\dagger \hat{\rho} \hat{a} - \frac{1}{2} \{ \hat{a} \hat{a}^\dagger, \hat{\rho} \} \right] \tag{4.108}$$

となる．ここで右辺第一項はキャビティ外へ光子がロスする効果を，第二項はキャビティ

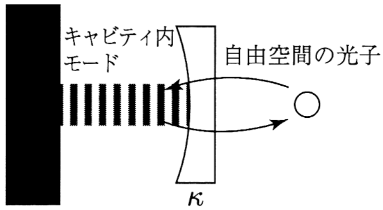


図 4.2　キャビティの模式図．左側のミラーは完全反射するが，右側のミラーは反射率が 1 未満であり，外部の電磁場と結合している．その結果，キャビティ中の電磁場の振幅は時間的に変動する．

外から光子が入る効果を表している．両者は詳細釣り合いの条件を満たしている．

4.5　量子ドットとリード線の相互作用

4.4 節では環境が電磁場（すなわち，ボゾン）の場合を考えた．本節では，環境が電子系（すなわち，フェルミオン）の場合を考えよう．この場合でも 4.3 節の一般論を適用することができる．

具体的には，**量子ドット**（**quantum dot**）に閉じ込められた電子のダイナミクスを考える．ここで量子ドットとは，電子を閉じ込めることができる空間的に局在した「井戸」のような領域である．さらに，量子ドットの中には電子が高々一個しか入らないとしよう*5)．また，簡単のために電子のスピン自由度は無視できるとする．このとき，ドット内の電子の状態は二次元のヒルベルト空間で記述され，ハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\mathrm{S}} := \varepsilon_0 \hat{d}^\dagger \hat{d} \tag{4.109}$$

で与えられる．ここで ε_0 はドット内の電子のエネルギー準位で，$\hat{d}^\dagger$，$\hat{d}$ は電子の生成消滅演算子である．電子はフェルミオンなので，生成消滅演算子は次のような反交換関係を満たす:

$$\{\hat{d}, \hat{d}^\dagger\} = 1,\ \{\hat{d}, \hat{d}\} = 0,\ \{\hat{d}^\dagger, \hat{d}^\dagger\} = 0. \tag{4.110}$$

なお，$\hat{d}^\dagger \hat{d}$ は電子の個数演算子である．

まず，図 4.3 (a) のように，量子ドットが一つの**リード線**とつながっている状況を考える．ここでリード線は，理想フェルミ気体とみなせる金属とする．リード線中の電子のハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\mathrm{L}} := \sum_k \varepsilon_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \tag{4.111}$$

となる．ここで k は電子の波数，ε_k はそれに対応するエネルギー，$\hat{a}_k^\dagger$，$\hat{a}_k$ はそのモードの生成消滅演算子である．また，ドットとリード線の相互作用ハミルトニアンは

*5)　このような状況は，量子ドットのキャパシタンスが小さく，電子一個分の帯電エネルギーが熱エネルギーよりも大きい場合に実現され，クーロン・ブロッケード（Coulomb blockade）と呼ばれる．

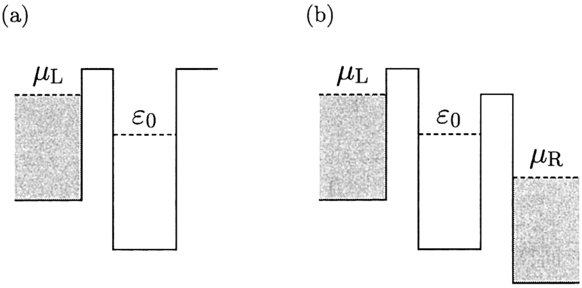


図 4.3　量子ドットとリード線の模式図．リード線はドットにとって電子の粒子浴の役割を果たしている．(a) リード線が一つの場合．(b) リード線が二つの場合．ϵ_0 はドット内の電子準位のエネルギー，μ_L (μ_R) は左（右）側のリード線の化学ポテンシャルである．

$$\hat{H}_{\mathrm{int}} := \sum_k (\gamma_k \hat{d}\hat{a}_k^\dagger + \gamma_k^* \hat{d}^\dagger \hat{a}_k) \tag{4.112}$$

と書けるとする．これは，電子がトンネル効果で量子ドットとリード線の間を移動することを表している．γ_k は k のモードの電子のトンネリングの大きさを特徴づける定数である．また，リード線の状態は逆温度 β，化学ポテンシャル μ_L の熱平衡状態であるとする．このとき，k のモードの平均電子数は，以下の**フェルミ分布関数**（**Fermi distribution function**）で与えられる:

$$f_L(\varepsilon_k) := \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu_L)} + 1}. \tag{4.113}$$

さて，$\hat{H}_S + \hat{H}_L$ に関する相互作用表示を考えよう．反交換関係 (4.110) に注意すると，相互作用ハミルトニアンの相互作用表示は

$$\hat{H}_{\mathrm{int}}^{\mathrm{I}}(t) = e^{-\mathrm{i}\varepsilon_0 t/\hbar}\hat{d}\hat{B}^{\mathrm{I}\dagger}(t) + e^{\mathrm{i}\varepsilon_0 t/\hbar}\hat{d}^\dagger \hat{B}^{\mathrm{I}}(t) \tag{4.114}$$

となる．ここで

$$\hat{B}^{\mathrm{I}}(t) := \sum_k \gamma_k \hat{a}_k e^{-\mathrm{i}\varepsilon_k t/\hbar} \tag{4.115}$$

とおいた．ここで 4.3 節の一般論を適用すると，(4.58) に対応する散逸係数は

$$\begin{aligned} \gamma_- &:= \frac{1}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{\mathrm{i}\varepsilon_0 s/\hbar}\langle \hat{B}^{\mathrm{I}}(s)\hat{B}^{\mathrm{I}\dagger}(0)\rangle, \\ \gamma_+ &:= \frac{1}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{\mathrm{i}\varepsilon_0 s/\hbar}\langle \hat{B}^{\mathrm{I}\dagger}(0)\hat{B}^{\mathrm{I}}(s)\rangle \end{aligned} \tag{4.116}$$

となる．ここで $\langle\cdots\rangle$ はリード線の熱平衡状態に関する期待値を表す．これらをさらに計算すると，まず γ_+ は

$$\gamma_+ = \frac{1}{\hbar^2}\sum_k f_L(\varepsilon_k)|\gamma_k|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{\mathrm{i}(\varepsilon_0 - \varepsilon_k)s/\hbar}$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_k f_{\mathrm{L}}(\varepsilon_k) |\gamma_k|^2 \delta(\varepsilon_0 - \varepsilon_k) \tag{4.117}$$
$$= \frac{2\pi}{\hbar} f_{\mathrm{L}}(\varepsilon_0) \Gamma_{\mathrm{L}}$$

となる．ここで

$$\Gamma_{\mathrm{L}} := \sum_k |\gamma_k|^2 \delta(\varepsilon_0 - \varepsilon_k) \tag{4.118}$$

とおいた．同様にして

$$\gamma_- = \frac{2\pi}{\hbar}(1 - f_{\mathrm{L}}(\varepsilon_0))\Gamma_{\mathrm{L}} \tag{4.119}$$

が得られる．以上より，量子ドット中の電子の状態を記述する密度演算子 $\hat{\rho}$ が従う量子マスター方程式は，シュレーディンガー表示に戻って

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H}_{\mathrm{S}}, \hat{\rho}] + \frac{2\pi}{\hbar} f_{\mathrm{L}}(\varepsilon_0)\Gamma_{\mathrm{L}} \left(\hat{d}^\dagger \hat{\rho} \hat{d} - \frac{\{\hat{d}\hat{d}^\dagger, \hat{\rho}\}}{2} \right) + \frac{2\pi}{\hbar}(1 - f_{\mathrm{L}}(\varepsilon_0))\Gamma_{\mathrm{L}} \left(\hat{d}\hat{\rho}\hat{d}^\dagger - \frac{\{\hat{d}^\dagger \hat{d}, \hat{\rho}\}}{2} \right) \tag{4.120}$$

で与えられることが分かる．ここで，右辺第二項はリード線からドットに電子が入る効果を，第三項はドットからリード線に電子が出ていく効果を表している．ここでドットに電子がある確率を $p_1 := \mathrm{tr}[\hat{d}^\dagger \hat{d} \hat{\rho}]$ とする（これはドットの平均電子数と同じである）．これが従う古典マスター方程式は，(4.120) より

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar}\Gamma_{\mathrm{L}} \left[f_{\mathrm{L}}(\varepsilon_0)(1 - p_1) - (1 - f_{\mathrm{L}}(\varepsilon_0))p_1 \right] \tag{4.121}$$

となる*6)．この定常解は

$$p_1^{\mathrm{ss}} = f(\varepsilon_0) \tag{4.122}$$

となり，リード線と同じ温度・同じ化学ポテンシャルの熱平衡状態になる．

次に，図 4.3 (b) のように，量子ドットが二つのリード線 L，R と相互作用している場合を考えよう．リード線 R の化学ポテンシャルを μ_{R} として，逆温度は L と同じ β とする．量子ドットとの相互作用は，単に (4.112) にリード線 R についての項を加えたもので与えられるとしよう．このとき，リード線が一つの場合の議論の直接的な拡張により，

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}}{dt} = &-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H}_{\mathrm{S}}, \hat{\rho}] \\ &+ \frac{2\pi}{\hbar} f_{\mathrm{L}}(\varepsilon_0)\Gamma_{\mathrm{L}} \left(\hat{d}^\dagger \hat{\rho} \hat{d} - \frac{\{\hat{d}\hat{d}^\dagger, \hat{\rho}\}}{2} \right) + \frac{2\pi}{\hbar}(1 - f_{\mathrm{L}}(\varepsilon_0))\Gamma_{\mathrm{L}} \left(\hat{d}\hat{\rho}\hat{d}^\dagger - \frac{\{\hat{d}^\dagger \hat{d}, \hat{\rho}\}}{2} \right) \\ &+ \frac{2\pi}{\hbar} f_{\mathrm{R}}(\varepsilon_0)\Gamma_{\mathrm{R}} \left(\hat{d}^\dagger \hat{\rho} \hat{d} - \frac{\{\hat{d}\hat{d}^\dagger, \hat{\rho}\}}{2} \right) + \frac{2\pi}{\hbar}(1 - f_{\mathrm{R}}(\varepsilon_0))\Gamma_{\mathrm{R}} \left(\hat{d}\hat{\rho}\hat{d}^\dagger - \frac{\{\hat{d}^\dagger \hat{d}, \hat{\rho}\}}{2} \right) \end{aligned} \tag{4.123}$$

という量子マスター方程式が得られる．なお，リード線 R に対応する量に添え字 R を付

*6) これは，フェルミの黄金律を用いて導出されるものと（係数まで含めて）一致する[54]．

けた．このとき，$p_1 := \mathrm{tr}[\hat{d}^\dagger \hat{d}\hat{\rho}]$ が従う古典マスター方程式は，

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{dt} =& \frac{2\pi}{\hbar}\left[f_{\mathrm{L}}(\varepsilon_0)\Gamma_{\mathrm{L}}(1-p_1) - (1-f_{\mathrm{L}}(\varepsilon_0))\Gamma_{\mathrm{L}} p_1\right. \\ &\left. + f_{\mathrm{R}}(\varepsilon_0)\Gamma_{\mathrm{R}}(1-p_1) - (1-f_{\mathrm{R}}(\varepsilon_0))\Gamma_{\mathrm{R}} p_1\right]\end{aligned} \tag{4.124}$$

となる．

さて，リード線が二つあるときのドットの定常状態について考えよう．(4.124) の定常解は

$$p_1^{\mathrm{ss}} = \frac{\Gamma_{\mathrm{L}} f_{\mathrm{L}}(\varepsilon_0) + \Gamma_{\mathrm{R}} f_{\mathrm{R}}(\varepsilon_0)}{\Gamma_{\mathrm{L}} + \Gamma_{\mathrm{R}}} \tag{4.125}$$

で与えられる．したがって，定常状態における電子数の流れは

$$\begin{aligned}J^{\mathrm{ss}} :=& \frac{2\pi}{\hbar}\left[f_{\mathrm{L}}(\varepsilon_0)\Gamma_{\mathrm{L}}(1-p_1^{\mathrm{ss}}) - (1-f_{\mathrm{L}}(\varepsilon_0))\Gamma_{\mathrm{L}} p_1^{\mathrm{ss}}\right] \\ =& \frac{\Gamma_{\mathrm{L}}\Gamma_{\mathrm{R}}}{\Gamma_{\mathrm{L}} + \Gamma_{\mathrm{R}}}(f_{\mathrm{L}}(\varepsilon_0) - f_{\mathrm{R}}(\varepsilon_0))\end{aligned} \tag{4.126}$$

となる．ここで電流は $I^{\mathrm{ss}} := -eJ^{\mathrm{ss}}$（$e$ は素電荷），リード線間の電位差は $V := -(\mu_{\mathrm{L}} - \mu_{\mathrm{R}})/e$ であることに注意すると，コンダクタンスは

$$G := \frac{I^{\mathrm{ss}}}{V} = e^2 \frac{J^{\mathrm{ss}}}{\mu_{\mathrm{L}} - \mu_{\mathrm{R}}} \tag{4.127}$$

と定義される．(4.126) より，これは

$$G = \frac{2\pi e^2}{\hbar} \frac{\Gamma_{\mathrm{L}}\Gamma_{\mathrm{R}}}{\Gamma_{\mathrm{L}} + \Gamma_{\mathrm{R}}} \frac{f_{\mathrm{L}}(\varepsilon_0) - f_{\mathrm{R}}(\varepsilon_0)}{\mu_{\mathrm{L}} - \mu_{\mathrm{R}}} \tag{4.128}$$

と書ける[*7]．$\beta(\mu_{\mathrm{L}} - \mu_{\mathrm{R}}) \to 0$ の極限で，コンダクタンスは

$$G \to \frac{\pi e^2 \beta}{2\hbar} \frac{\Gamma_{\mathrm{L}}\Gamma_{\mathrm{R}}}{\Gamma_{\mathrm{L}} + \Gamma_{\mathrm{R}}} \tag{4.129}$$

となる．以上のように，二つのリード線の化学ポテンシャル μ_{L} と μ_{R} が異なれば，量子マスター方程式 (4.123) の定常状態はもはや熱平衡状態にはならず，量子ドットを介して二つのリード線の間を電流が流れる状態（非平衡定常状態）が実現される．

ここまでは，量子ドットが一つしかない場合を考えていた．量子ドットが複数あって互いに相互作用している場合は，量子マスター方程式の扱いに注意が必要である．たとえば，図 4.4 のように，複数の量子ドットが一列に並び，その両端にあるドットがそれぞれリード線と相互作用している場合を考える．リード線 L と相互作用する一番左のドットの消滅演算子を $\hat{d}_1$ として，リード線 R と相互作用する一番右のドットの消滅演算子を $\hat{d}_N$ とする（図 4.4 では $N = 3$ である）．これに対してナイーブに量子マスター方程式を書き下すと，

*7）これは**ランダウア公式**（**Landauer formula**）に似ているが，いまはボルン・マルコフ近似をしているので，完全に同じものではない．

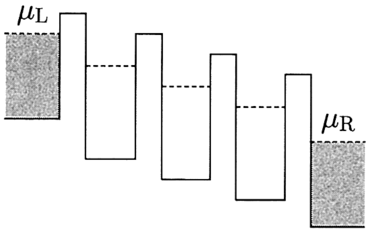


図 4.4　複数の量子ドットとリード線の模式図.

$$
\begin{aligned}
\frac{d\hat{\rho}}{dt} &= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H}_{\mathrm{S}}, \hat{\rho}] \\
&+ \frac{2\pi}{\hbar} f_{\mathrm{L}}(\varepsilon_0)\Gamma_{\mathrm{L}} \left(\hat{d}_1^\dagger \hat{\rho} \hat{d}_1 - \frac{\{\hat{d}_1 \hat{d}_1^\dagger, \hat{\rho}\}}{2} \right) + \frac{2\pi}{\hbar}(1 - f_{\mathrm{L}}(\varepsilon_0))\Gamma_{\mathrm{L}} \left(\hat{d}_1 \hat{\rho} \hat{d}_1^\dagger - \frac{\{\hat{d}_1^\dagger \hat{d}_1, \hat{\rho}\}}{2} \right) \\
&+ \frac{2\pi}{\hbar} f_{\mathrm{R}}(\varepsilon_0)\Gamma_{\mathrm{R}} \left(\hat{d}_N^\dagger \hat{\rho} \hat{d}_N - \frac{\{\hat{d}_N \hat{d}_N^\dagger, \hat{\rho}\}}{2} \right) + \frac{2\pi}{\hbar}(1 - f_{\mathrm{R}}(\varepsilon_0))\Gamma_{\mathrm{R}} \left(\hat{d}_N \hat{\rho} \hat{d}_N^\dagger - \frac{\{\hat{d}_N^\dagger \hat{d}_N, \hat{\rho}\}}{2} \right)
\end{aligned}
\tag{4.130}
$$

となる．ここで $\hat{\rho}$ はすべてのドットの状態を表す密度演算子で，$\hat{H}_{\mathrm{S}}$ はドット間の相互作用も含んだハミルトニアンである．しかし，この量子マスター方程式は必ずしも物理的に自然な性質をもつとは限らない．たとえば，二つのリード線の温度と化学ポテンシャルが等しい場合でも，$\hat{\rho}$ の定常状態はカノニカル分布になるとは限らないことが知られている[28]．この理由は，両端の量子ドットに作用するリンドブラッド演算子は，両端の量子ドットをそれぞれの自由ハミルトニアンについてのカノニカル分布に駆動するが，相互作用の効果によりこれは全体のカノニカル分布と一致しないことである．言い換えると，両端の量子ドットの電子を生成消滅するリンドブラッド演算子と，ドット間相互作用のある場合の全系のハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{S}}$ とは，4.3 節で仮定した交換関係 (4.45) を満たさない．$\hat{H}_{\mathrm{S}}$ との間で (4.45) を満たすようなリンドブラッド演算子は，ドットの全体にわたって電子を非局所的に生成消滅する演算子になる*8)．このように，多体系に対する量子マスター方程式の適用（とくに，回転波近似の取り扱い）には注意が必要である．

*8)　これは，$\hat{H}_{\mathrm{S}}$ のスペクトル分解に基づいた回転波近似をすることに対応している．

第 5 章
確率マスター方程式

第 4 章で議論した量子マスター方程式は，システムと環境は相互作用しているが，システムの情報を観測者が読み出すことはないと仮定した場合の時間発展方程式である．それでは，観測によってシステムから連続的に情報を読み出すと，システムの時間発展はどうなるだろうか．本章では，そのような状況を記述する方法である確率シュレーディンガー方程式（stochastic Schrödinger equation）と確率マスター方程式（stochastic master equation）について詳しく述べる．これらはそれぞれ，量子連続測定が行われているときの状態ベクトルと密度演算子の時間発展を記述する．量子連続測定の結果は確率的に得られるが，その結果に応じて対象系にどのような反作用があるかを記述するのが，これらの方程式である．あらゆる測定結果についてのアンサンブル平均を考えると，これらの方程式はいずれも 4.1 節で議論した量子マスター方程式に帰着する．

測定結果が確率的に得られることに起因して，これらの方程式は確率微分方程式になる（確率微分方程式の詳細は B.1 節を参照）．5.1 節では確率過程がポアソン過程の場合，5.2 節ではポアソン過程の連続極限としてガウス過程となる場合を議論する．また，古典確率過程に対する測定を記述するカルマンフィルタ（詳細は B.2 説を参照）との対応も議論する．なお，確率マスター方程式のミクロなハミルトニアンから導出は，7.3 節で行う．

本章と次章では，測定結果に条件付けられた（ある測定結果を得たという条件のもとでの）状態ベクトルを $|\psi_{\mathrm{c}}\rangle$，密度演算子を $\hat{\rho}_{\mathrm{c}}$ のように，添え字 $_{\mathrm{c}}$ を付けて書くことにする（c は conditional（条件付き）を意味する）．また，測定結果に条件付けられた期待値を $\langle\cdots\rangle_{\mathrm{c}}$ と書く．すなわち，$\langle\cdots\rangle_{\mathrm{c}} = \langle\psi_{\mathrm{c}}|\cdots|\psi_{\mathrm{c}}\rangle$ あるいは $\langle\cdots\rangle_{\mathrm{c}} = \mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}\cdots]$ である．一方で，あらゆる測定結果に関するアンサンブル平均を $E[\cdots]$ と書く．たとえば，アンサンブル平均の密度演算子を $\hat{\rho}$ とすると，$\hat{\rho} = E[|\psi_{\mathrm{c}}\rangle\langle\psi_{\mathrm{c}}|]$ あるいは $\hat{\rho} = E[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}]$ である．

5.1 ポアソン過程

本節では，量子測定の結果がポアソン過程によって記述される場合を議論する（ポアソン過程の詳細は B.1.8 節を参照）．

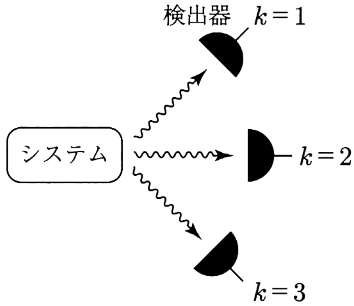


図 5.1　システムと，それを連続的にモニターする検出器の模式図．検出器が微小時間 Δt ごとにシステムと相互作用し，測定結果 k のうちいずれかを出力する（測定結果が k のとき，それに対応する検出器が反応する）．システムの状態は，測定結果 k に応じて変化する．

5.1.1　直接検出

図 5.1 のように，測定結果 "k" を出力する検出器があり，それが連続的にシステムをモニターしているとする．マスター方程式 (4.6) に対応するクラウス演算子は (4.1) で与えられる．簡単のため，システムのハミルトニアンの項は明示的に書かないことにすると，

$$\hat{M}_0 = \hat{I} - \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k \Delta t, \qquad \hat{M}_k = \hat{L}_k\sqrt{\Delta t} \ \ (k \geq 1) \tag{5.1}$$

となる．微小時間 Δt の間に 1 回，このクラウス演算子に対応する測定を行い，測定結果 k を得たとする．この測定結果のもとでの条件付き時間発展を考えよう．初期状態が状態ベクトル $|\psi\rangle$ で記述されているとする．測定結果が k となる確率は $p_k = \langle\psi|\hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k|\psi\rangle$ である．まず $k=0$ のときの測定後の状態は

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{p_0}}\hat{M}_0|\psi\rangle &= \frac{|\psi\rangle - 2^{-1}\sum_{k\geq 1}\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k|\psi\rangle\Delta t}{\sqrt{1-\sum_{k\geq 1}\langle\psi|\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k|\psi\rangle\Delta t + o(\Delta t)}} \\ &= |\psi\rangle - \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\left(\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k - \|\hat{L}_k|\psi\rangle\|^2\right)|\psi\rangle\Delta t + o(\Delta t)\end{aligned} \tag{5.2}$$

となる．一方，$k \geq 1$ のときの測定後の状態は

$$\frac{1}{\sqrt{p_k}}\hat{M}_k|\psi\rangle = \frac{\hat{L}_k\sqrt{\Delta t}|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k|\psi\rangle\Delta t}} = \frac{\hat{L}_k|\psi\rangle}{\|\hat{L}_k|\psi\rangle\|} \tag{5.3}$$

である．これらはいずれも $|\psi\rangle$ について非線形な時間発展だが，その非線形性は式 (5.3) の分母の規格化因子に由来する．

さて，測定結果を記述するポアソン過程を考える．時間 Δt の間のポアソン過程を記述する確率変数 ΔN_k （$k \geq 1$）を，測定結果 k (≥ 1) が得られたときに 1，それ以外のときは 0 となるように定義する．すなわち，測定結果が k (≥ 1) のときは $\Delta N_{k'} = \delta_{kk'}$，$k = 0$ のときはすべての k' (≥ 1) について $\Delta N_{k'} = 0$ である．両者をまとめると，$\Delta N_{k'} = \delta_{kk'}(1-\delta_{k0})$ と書くことができる．したがって，$1 - \sum_{k'\geq 1}\Delta N_{k'}$ は，$k=0$ のときに 1 となり，$k \geq 1$ のときに 0 となる．また，ΔN_k のアンサンブル平均は

$$E[\Delta N_k] = \|\hat{L}_k|\psi\rangle\|^2 \Delta t \tag{5.4}$$

を満たす．また，定義より $\Delta N_k \Delta N_{k'} = 0$（$k \neq k'$），$\Delta N_k^2 = \Delta N_k$ なので，これらをまとめて

$$\Delta N_k \Delta N_{k'} = \delta_{kk'} \Delta N_k \tag{5.5}$$

と書ける．

この確率変数 ΔN_k を使って (5.2) と (5.3) をまとめて書こう．$|\psi\rangle$ を時刻 t における（それまでの測定結果に条件付けられた）状態 $|\psi_{\mathrm{c}}(t)\rangle$ とすると，

$$\begin{aligned}|\psi_{\mathrm{c}}(t+\Delta t)\rangle = &\left(|\psi_{\mathrm{c}}(t)\rangle - \frac{1}{2}\sum_k (\hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k - \|\hat{L}_k|\psi_{\mathrm{c}}(t)\rangle\|^2)|\psi_{\mathrm{c}}(t)\rangle \Delta t\right)\left(1 - \sum_k \Delta N_k\right) \\ &+ \sum_k \frac{\hat{L}_k|\psi_{\mathrm{c}}(t)\rangle}{\|\hat{L}_k|\psi_{\mathrm{c}}(t)\rangle\|} \Delta N_k + o(\Delta t)\end{aligned} \tag{5.6}$$

となる．ここで右辺第一項が $k=0$ の場合，第二項が $k \geq 1$ の場合に対応している．これをさらに変形すると

$$\begin{aligned}|\psi_{\mathrm{c}}(t+\Delta t)\rangle =& |\psi_{\mathrm{c}}(t)\rangle - \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1} (\hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k - \|\hat{L}_k|\psi_{\mathrm{c}}(t)\rangle\|^2)|\psi_{\mathrm{c}}(t)\rangle \Delta t \\ &+ \sum_{k\geq 1}\left(\frac{\hat{L}_k|\psi_{\mathrm{c}}(t)\rangle}{\|\hat{L}_k|\psi_{\mathrm{c}}(t)\rangle\|} - |\psi_{\mathrm{c}}(t)\rangle\right)\Delta N_k + o(\Delta t)\end{aligned} \tag{5.7}$$

となる．ここで，$\Delta t \Delta N_k = o(\Delta t)$ であることを使った．$\Delta t \to 0$ の極限をとって，

$$d|\psi_{\mathrm{c}}(t)\rangle = -\frac{1}{2}\sum_{k\geq 1} (\hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k - \|\hat{L}_k|\psi_{\mathrm{c}}(t)\rangle\|^2)|\psi_{\mathrm{c}}(t)\rangle dt + \sum_{k\geq 1}\left(\frac{\hat{L}_k|\psi_{\mathrm{c}}(t)\rangle}{\|\hat{L}_k|\psi_{\mathrm{c}}(t)\rangle\|} - |\psi_{\mathrm{c}}(t)\rangle\right)\cdot dN_k \tag{5.8}$$

を得る．これは伊藤型の確率微分方程式であり，右辺の $\cdot$ は伊藤型の積であることを表す（詳しくは付録 B.1 を参照）．dN_k はポアソン増分で，

$$E[dN_k] = \|\hat{L}_k|\psi_{\mathrm{c}}\rangle\|^2 dt, \quad dN_k dN_{k'} = \delta_{kk'} dN_k \tag{5.9}$$

を満たす．なお (5.9) の左辺のアンサンブル平均は，時刻 t までの測定結果には条件付けられているが，t から $t+dt$ までの測定結果には条件付けられておらず，この意味で $E[\cdots]$ と書いた．(5.8) の右辺第二項が，$k \geq 1$ の測定結果を得たことで量子状態が瞬間的に変わる状況を表す．このような瞬間的な変化は**量子ジャンプ**（**quantum jump**）と呼ばれる．方程式 (5.8) がポアソン過程の場合の**確率シュレーディンガー方程式**であり，その解 $|\psi_{\mathrm{c}}(t)\rangle$ は**量子軌跡**（**quantum trajectory**）と呼ばれる．

次に確率マスター方程式を導こう．ポアソン過程の伊藤公式（B.1.8 節を参照）を使うと

$$\begin{aligned}d(|\psi_{\mathrm{c}}\rangle\langle\psi_{\mathrm{c}}|) =& (d|\psi_{\mathrm{c}}\rangle)\langle\psi_{\mathrm{c}}| + |\psi_{\mathrm{c}}\rangle(d\langle\psi_{\mathrm{c}}|) + (d|\psi_{\mathrm{c}}\rangle)(d\langle\psi_{\mathrm{c}}|) \\ =& -\frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\{\hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k, |\psi_{\mathrm{c}}\rangle\langle\psi_{\mathrm{c}}|\}dt + \sum_{k\geq 1}\|\hat{L}_k|\psi_{\mathrm{c}}\rangle\|^2 |\psi_{\mathrm{c}}\rangle\langle\psi_{\mathrm{c}}| dt \\ &+ \sum_{k\geq 1}\left(\frac{\hat{L}_k|\psi_{\mathrm{c}}\rangle\langle\psi_{\mathrm{c}}|\hat{L}_k^\dagger}{\|\hat{L}_k|\psi_{\mathrm{c}}\rangle\|^2} - |\psi_{\mathrm{c}}\rangle\langle\psi_{\mathrm{c}}|\right)\cdot dN_k\end{aligned} \tag{5.10}$$

を得る．一般の密度演算子 $\hat{\rho}_{\rm c}$ に対する確率マスター方程式は，式 (5.10) の $|\psi_{\rm c}\rangle\langle\psi_{\rm c}|$ を $\hat{\rho}_{\rm c}$ に置き換えれば得られる:*1)

$$d\hat{\rho}_{\rm c} = -\frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\{\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k, \hat{\rho}_{\rm c}\}dt + \sum_{k\geq 1}{\rm tr}[\hat{\rho}_{\rm c}\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k]\hat{\rho}_{\rm c}dt + \sum_{k\geq 1}\left(\frac{\hat{L}_k\hat{\rho}_{\rm c}\hat{L}_k^\dagger}{{\rm tr}[\hat{\rho}_{\rm c}\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k]} - \hat{\rho}_{\rm c}\right)\cdot dN_k. \tag{5.11}$$

ここでポアソン増分 dN_k は

$$E[dN_k] = {\rm tr}[\hat{\rho}_{\rm c}\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k]dt, \quad dN_k dN_{k'} = \delta_{kk'}dN_k \tag{5.12}$$

を満たす．式 (5.10) が，ポアソン過程の場合の**確率マスター方程式**である．その解 $\hat{\rho}_{\rm c}(t)$ は，確率シュレーディンガー方程式のときと同様に，量子軌跡（quantum trajectory）と呼ばれる．

式 (5.10) を dN_k についてアンサンブル平均するとリンドブラッド型マスター方程式 (4.6) が得られることは容易に確かめられる．このように，量子マスター方程式を分解して得られる確率マスター方程式を，**アンラベリング**（**unraveling**）という*2)．とくに，状態が純粋状態の場合のアンラベリングは，確率シュレーディンガー方程式となる．

検出器が必ずしも完璧ではなく，検出効率が η $(0 \leq \eta \leq 1)$ の場合を考えよう．すなわち，イベント k が生じたとき，確率 η で検出に成功するが，$1-\eta$ で検出できないとする．この成功・不成功はランダムに起きるとする．これは，(5.11) のポアソン増分の項を $\eta dN_k + (1-\eta)dN_k$ と分解し，測定結果を知らない第二項だけに関してアンサンブル平均をとってしまうことに対応している．こうして得られる確率マスター方程式は

$$\begin{aligned} d\hat{\rho}_{\rm c} &= (1-\eta)\sum_{k\geq 1}\left(\hat{L}_k\hat{\rho}_{\rm c}\hat{L}_k^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k, \hat{\rho}_{\rm c}\}\right) \\ &\quad + \eta\left[-\frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\{\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k, \hat{\rho}_{\rm c}\}dt + \sum_{k\geq 1}{\rm tr}[\hat{\rho}_{\rm c}\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k]\hat{\rho}_{\rm c}dt + \sum_{k\geq 1}\left(\frac{\hat{L}_k\hat{\rho}_{\rm c}\hat{L}_k^\dagger}{{\rm tr}[\hat{\rho}_{\rm c}\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k]} - \hat{\rho}_{\rm c}\right)\cdot dN_k\right] \end{aligned} \tag{5.13}$$

となる．

具体例として，二準位原子の自然放出を考える．光子が放出されたかどうかを効率 1 で検出し，検出されたときに $dN=1$ となるポアソン増分 dN を考える．確率シュレーディンガー方程式は

$$d|\psi_{\rm c}(t)\rangle = -\frac{1}{2}(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- - \|\hat{\sigma}_-|\psi_{\rm c}(t)\rangle\|^2)|\psi_{\rm c}(t)\rangle dt + \left(\frac{\hat{\sigma}_-|\psi_{\rm c}(t)\rangle}{\|\hat{\sigma}_-|\psi_{\rm c}(t)\rangle\|} - |\psi_{\rm c}(t)\rangle\right)\cdot dN \tag{5.14}$$

で与えられる．ここで $E[dN] = \|\hat{\sigma}_-|\psi_{\rm c}\rangle\|^2 dt$ である．同様に確率マスター方程式は

$$d\hat{\rho}_{\rm c} = -\frac{1}{2}\{\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-, \hat{\rho}_{\rm c}\}dt + {\rm tr}[\hat{\rho}_{\rm c}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-]\hat{\rho}_{\rm c}dt + \left(\frac{\hat{\sigma}_-\hat{\rho}_{\rm c}\hat{\sigma}_+}{{\rm tr}[\hat{\rho}_{\rm c}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-]} - \hat{\rho}_{\rm c}\right)\cdot dN \tag{5.15}$$

*1) クラウス演算子 (5.1) を密度演算子に作用させて，(5.8) を導いたのと同様の議論をすることで直接 (5.10) を得ることもできる．

*2) ここで，"unravel" とは「ときほぐす」という意味である．アンラベリングという用語は，量子マスター方程式を，アンサンブル平均がそれと一致するような確率マスター方程式に分解することに由来する．

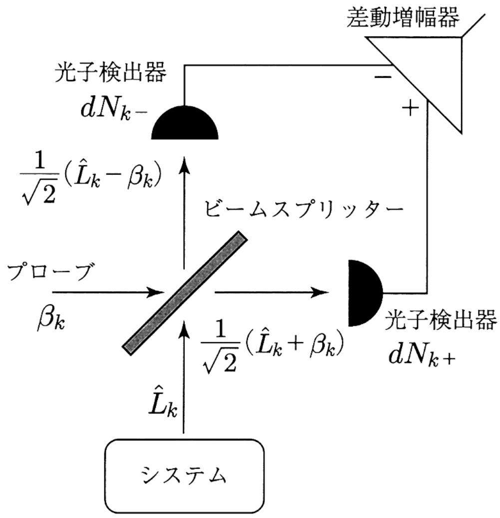


図 5.2　ホモダイン測定の模式図．$\hat{L}_k$ と β_k が半分ずつビームスプリッターで混合され，出力が二つの光子検出器で検出される．そして，その出力は差動増幅器に入力され，両者の差が出力される．

となる．ここで $E[dN]=\mathrm{tr}[\hat{\rho}_\mathrm{c}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-]dt$ である．

5.1.2　ホモダイン測定

クラウス演算子が一意でないことに対応して，アンラベリングも一意ではない（同じ量子マスター方程式に，複数の確率シュレーディンガー方程式，確率マスター方程式が対応しうる）．ここでは，5.1.1 節とは異なるアンラベリングとして，ホモダイン測定を考える．

図 5.2 のように，システムからの出力（たとえば放出された光子）とプローブ（ローカルオシレーター）を混合することを考える．ラベル k ごとにプローブがあるとして，複素数 $\beta_k=|\beta_k|e^{\mathrm{i}\theta_k}$ $(k\geq 1)$ がそれを特徴づけているとする（これはたとえば，入力のコヒーレント光の振幅に対応する）．このとき，クラウス演算子を

$$\begin{aligned}\hat{M}'_0 &:= \hat{I}-\frac{1}{2}\sum_k(\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k+|\beta_k|^2)\Delta t,\\ \hat{M}'_{k\pm} &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_k\pm\hat{L}_k)\sqrt{\Delta t}\quad(k\geq 1)\end{aligned}\tag{5.16}$$

とする．これが (5.1) と同じ量子マスター方程式に対応することは容易に確かめられる．すなわち，(5.1) の $\hat{M}_k$ と (5.16) の $\hat{M}_{k\pm}$ は，任意の $\hat{\rho}_\mathrm{c}$ に対して

$$\sum_{k\geq 0}\hat{M}_k\hat{\rho}_\mathrm{c}\hat{M}_k^\dagger=\hat{M}'_0\hat{\rho}_\mathrm{c}\hat{M}_0'^\dagger+\sum_{k\geq 1,\pm}\hat{M}'_{k\pm}\hat{\rho}_\mathrm{c}\hat{M}_{k\pm}'^\dagger \tag{5.17}$$

を満たす．

クラウス演算子 (5.1) に対応する確率シュレーディンガー方程式は，5.1.1 節と同様の議論により

$$
\begin{aligned}
d|\psi_\mathrm{c}\rangle = &-\frac{1}{2}\sum_k(\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k - \|\hat{L}_k|\psi_\mathrm{c}\rangle\|^2)|\psi_\mathrm{c}\rangle dt \\
&+\sum_k\left(\frac{(\beta_k+\hat{L}_k)|\psi_\mathrm{c}\rangle}{\|(\beta_k+\hat{L}_k)|\psi_\mathrm{c}\rangle\|} - |\psi_\mathrm{c}\rangle\right)\cdot dN_{k+} + \sum_k\left(\frac{(\beta_k-\hat{L}_k)|\psi_\mathrm{c}\rangle}{\|(\beta_k-\hat{L}_k)|\psi_\mathrm{c}\rangle\|} - |\psi_\mathrm{c}\rangle\right)\cdot dN_{k-}
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

となる．ここで $dN_{k\pm}$ は，お互いに独立なポアソン過程を記述しており，そのアンサンブル平均は

$$
E[dN_{k\pm}] = \frac{1}{2}\|(\beta_k \pm \hat{L}_k)|\psi_\mathrm{c}\rangle\|^2 dt \tag{5.19}
$$

で与えられる．

測定結果は $k+$ と $k-$ であるが，有益な情報は両者が測定された回数の差 $dN_{k+} - dN_{k-}$ である．そのアンサンブル平均は

$$
\begin{aligned}
E[dN_{k+} - dN_{k-}] &= \langle\psi_\mathrm{c}|(\beta_k\hat{L}_k^\dagger + \beta_k^*\hat{L}_k)|\psi_\mathrm{c}\rangle dt \\
&= |\beta_k|\langle\psi_\mathrm{c}|e^{\mathrm{i}\theta_k}\hat{L}_k^\dagger + e^{-\mathrm{i}\theta_k}\hat{L}_k|\psi_\mathrm{c}\rangle dt
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

となる．すなわち，

$$
\hat{L}_{\theta_k} := \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}\theta_k}\hat{L}_k^\dagger + e^{-\mathrm{i}\theta_k}\hat{L}_k) \tag{5.21}
$$

という物理量の期待値が，測定結果から分かることになる:

$$
\langle\psi_\mathrm{c}|\hat{L}_{\theta_k}|\psi_\mathrm{c}\rangle = \frac{1}{2|\beta_k|}E[dN_{k+} - dN_{k-}]. \tag{5.22}
$$

θ_k を変えることで，測りたい物理量を変えられる．たとえば，システムが電磁場の直交位相振幅で $\hat{L} = \hat{a}$ のとき，$\theta_k = 0$ と $\pi/2$ はそれぞれ $\hat{x}$ と $\hat{p}$ に対応している．

確率マスター方程式は，やはり 5.1.1 節と同様に

$$
\begin{aligned}
d\rho_\mathrm{c} = &-\frac{1}{2}\sum_k\{\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k, \hat{\rho}_\mathrm{c}\}dt + \sum_k \mathrm{tr}[\hat{\rho}_\mathrm{c}\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k]\hat{\rho}_\mathrm{c}dt \\
&+\sum_k\left(\frac{(\beta_k+\hat{L}_k)\hat{\rho}_\mathrm{c}(\beta_k^*+\hat{L}_k^\dagger)}{\mathrm{tr}[(\beta_k+\hat{L}_k)\hat{\rho}_\mathrm{c}(\beta_k^*+\hat{L}_k^\dagger)]} - \hat{\rho}_\mathrm{c}\right)\cdot dN_{k+} \\
&+\sum_k\left(\frac{(\beta_k-\hat{L}_k)\hat{\rho}_\mathrm{c}(\beta_k^*-\hat{L}_k^\dagger)}{\mathrm{tr}[(\beta_k-\hat{L}_k)\hat{\rho}_\mathrm{c}(\beta_k^*-\hat{L}_k^\dagger)]} - \hat{\rho}_\mathrm{c}\right)\cdot dN_{k-}
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

と求まる．ここで，ポアソン増分 $dN_{k\pm}$ のアンサンブル平均は

$$
E[dN_{k\pm}] = \frac{1}{2}\mathrm{tr}[(\beta_k \pm \hat{L}_k)\hat{\rho}_\mathrm{c}(\beta_k^* \pm \hat{L}_k^\dagger)]dt \tag{5.24}
$$

である．ホモダイン測定の結果は

$$
\begin{aligned}
E[dN_{k+} - dN_{k-}] &= \mathrm{tr}[(\beta_k\hat{L}_k^\dagger + \beta_k^*\hat{L}_k)\hat{\rho}_\mathrm{c}]dt \\
&= 2|\beta_k|\mathrm{tr}[\hat{L}_{\theta_k}\hat{\rho}_\mathrm{c}]dt
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

となる．ここで左辺のアンサンブル平均は，時刻 t までの測定結果には条件付けられているが，t から $t+dt$ までの測定結果には条件付けられていないので，この意味で $E[\cdots]$ と書いた．

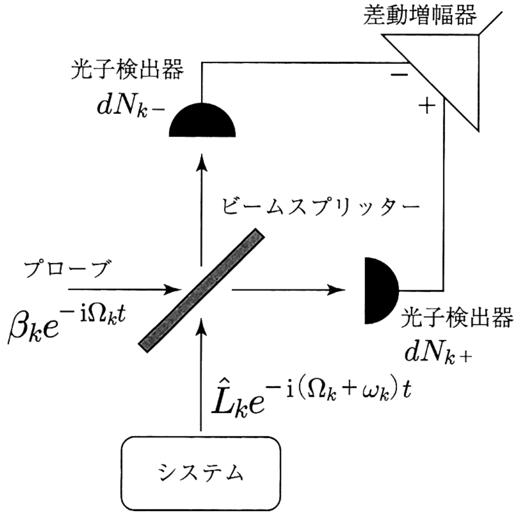


図 5.3　ヘテロダイン測定の模式図.

5.1.3　ヘテロダイン測定

次に，ローカルオシレーターの周波数とシステムの周波数が違う場合を考えよう（図 5.3 を参照）．これは 2.4.3 節で議論したヘテロダイン測定に対応する．k に対応するシステムの周波数を $\Omega_k + \omega_k$，ローカルオシレーターの周波数を Ω_k とする．周波数が異なるシステムとローカルオシレーターの時間発展を記述するために，自由ハミルトニアンに関する相互作用表示で考える．$\hat{L}_k$ と β_k の相互作用表示が，それぞれ

$$\hat{L}_k(t) = \hat{L}_k e^{-\mathrm{i}(\Omega_k+\omega_k)t}, \quad \beta_k(t) = \beta_k e^{-\mathrm{i}\Omega_k t} \tag{5.26}$$

で与えられるとする．ここで β_k の位相が回転するのは，ローカルオシレーターのコヒーレント状態が回転することに対応している．このとき，(5.18) に対応する確率シュレーディンガー方程式は，全体にかかる位相因子を除いて

$$\begin{aligned} d|\psi_\mathrm{c}\rangle = &-\frac{1}{2}\sum_k(\hat{L}_k^\dagger\hat{L}_k - \|\hat{L}_k|\psi_\mathrm{c}\rangle\|^2)|\psi_\mathrm{c}\rangle dt \\ &+\sum_k\left(\frac{(\beta_k e^{\mathrm{i}\omega_k t}+\hat{L}_k)|\psi_\mathrm{c}\rangle}{\|(\beta_k e^{\mathrm{i}\omega_k t}+\hat{L}_k)|\psi_\mathrm{c}\rangle\|} - |\psi_\mathrm{c}\rangle\right)\cdot dN_{k+} \\ &+\sum_k\left(\frac{(\beta_k e^{\mathrm{i}\omega_k t}-\hat{L}_k)|\psi_\mathrm{c}\rangle}{\|(\beta_k e^{\mathrm{i}\omega_k t}-\hat{L}_k)|\psi_\mathrm{c}\rangle\|} - |\psi_\mathrm{c}\rangle\right)\cdot dN_{k-} \end{aligned} \tag{5.27}$$

となる．なお，ホモダイン測定 (5.18) は $\omega_k = 0$ の場合に相当する．$k+$ と $k-$ が測定された回数の差をとったときのアンサンブル平均は

$$\begin{aligned} E[dN_{k+} - dN_{k-}] &= \langle\psi_\mathrm{c}|(\beta_k e^{\mathrm{i}\omega_k t}\hat{L}_k^\dagger + \beta_k^* e^{-\mathrm{i}\omega_k t}\hat{L}_k)|\psi_\mathrm{c}\rangle dt \\ &= 4|\beta_k|\langle\psi_\mathrm{c}|(\hat{L}_{\theta_k}\cos(\omega_k t) + \hat{L}_{\theta_k+\pi/2}\sin(\omega_k t))|\psi_\mathrm{c}\rangle dt \end{aligned} \tag{5.28}$$

となる．このサイン成分とコサイン成分を見れば，直交する二つの方向 $\hat{L}_{\theta_k}$ と $\hat{L}_{\theta_k+\pi/2}$ を同時に測定できることが分かる．確率マスター方程式についても同様に，

$$
\begin{aligned}
d\rho_{\rm c} =& -\frac{1}{2}\sum_k \{\hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k, \hat{\rho}_{\rm c}\}dt + \sum_k \mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\rm c}\hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k]\hat{\rho}_{\rm c}dt \\
&+ \sum_k \left(\frac{(\beta_k e^{\mathrm{i}\omega_k t} + \hat{L}_k)\hat{\rho}_{\rm c}(\beta_k^* e^{-\mathrm{i}\omega_k t} + \hat{L}_k^\dagger)}{\mathrm{tr}[(\beta_k e^{\mathrm{i}\omega_k t} + \hat{L}_k)\hat{\rho}_{\rm c}(\beta_k^* e^{-\mathrm{i}\omega_k t} + \hat{L}_k^\dagger)]} - \hat{\rho}_{\rm c} \right) \cdot dN_{k+} \\
&+ \sum_k \left(\frac{(\beta_k e^{\mathrm{i}\omega_k t} - \hat{L}_k)\hat{\rho}_{\rm c}(\beta_k^* e^{-\mathrm{i}\omega_k t} - \hat{L}_k^\dagger)}{\mathrm{tr}[(\beta_k e^{\mathrm{i}\omega_k t} - \hat{L}_k)\hat{\rho}_{\rm c}(\beta_k^* e^{-\mathrm{i}\omega_k t} - \hat{L}_k^\dagger)]} - \hat{\rho}_{\rm c} \right) \cdot dN_{k-},
\end{aligned} \tag{5.29}
$$

$$
\begin{aligned}
E[dN_{k+} - dN_{k-}] &= \mathrm{tr}\left[(\beta_k e^{\mathrm{i}\omega_k t}\hat{L}_k^\dagger + \beta_k^* e^{+\mathrm{i}\omega_k t}\hat{L}_k)\hat{\rho}_{\rm c} \right] dt \\
&= 4|\beta_k|\mathrm{tr}\left[(\hat{L}_{\theta_k}\cos(\omega_k t) + \hat{L}_{\theta_k+\pi/2}\sin(\omega_k t))\hat{\rho}_{\rm c} \right] dt
\end{aligned} \tag{5.30}
$$

となる．

5.2 ガウス過程

出力数が大きく連続変数とみなせる極限では，中心極限定理によりポアソン過程はガウス過程に漸近する．そこで本節では，ガウス過程で記述されるような確率シュレーディンガー方程式と確率マスター方程式を考える（ガウス過程については B.1 節を参照）．

5.2.1 ホモダイン測定

まず，5.1.2 節のホモダイン測定において，β_k が大きい極限をとることを考える．これはローカルオシレーターの強度が大きい極限に対応する．簡単のために以下では一つの k だけを考え，k の添え字を省略する: $\beta = |\beta|e^{\mathrm{i}\theta}$．$\varepsilon := |\beta|^{-1}$ として，ε を微小パラメータとする．

測定結果は $+$ または $-$ である．そこで，Δt よりは十分大きく，系の時間スケールよりは十分小さいような τ をとってきて，その中では $+$ と $-$ がともに多数回測定されるとする．N_+ と N_- を，それぞれ $+$ と $-$ が τ の時間内に測定された回数とする．このときの系の時間発展を考える．以下ではしばらく，$|\psi\rangle := |\psi_{\rm c}(t)\rangle$，$|\psi'\rangle := |\psi_{\rm c}(t+\tau)\rangle$ 書いて，添え字の $_{\rm c}$ を省略する．τ の一次のオーダーまでで

$$
|\psi'\rangle = \left(1 - \frac{\hat{L}^\dagger \hat{L} - \|\hat{L}|\psi\rangle\|^2}{2}\tau \right) \frac{(\beta + \hat{L})^{N+}(\beta - \hat{L})^{N-}|\psi\rangle}{\|(\beta + \hat{L})^{N+}(\beta - \hat{L})^{N-}|\psi\rangle\|} \tag{5.31}
$$

が成り立つ．ここで右辺は，$(+,-)$ が (N_+, N_-) 回測定され，それ以外のときは系が自由発展することを表している．これらの効果を表す演算子の積の順序は問題ではないことは以下に示される．なお，以下では $\langle\cdots\rangle := \langle\psi|\cdots|\psi\rangle$ とする．

(5.31) を ε に関して展開するために，まず

$$
\frac{(\beta + \hat{L})^{N+}(\beta - \hat{L})^{N-}|\psi\rangle}{\|(\beta + \hat{L})^{N+}(\beta - \hat{L})^{N-}|\psi\rangle\|} = \frac{(1 + e^{-\mathrm{i}\theta}\varepsilon\hat{L})^{N+}(1 - e^{-\mathrm{i}\theta}\varepsilon\hat{L})^{N-}|\psi\rangle}{\|(1 + e^{-\mathrm{i}\theta}\varepsilon\hat{L})^{N+}(1 - e^{-\mathrm{i}\theta}\varepsilon\hat{L})^{N-}|\psi\rangle\|} \tag{5.32}
$$

に注意する．この右辺の分子は，ε^2 のオーダーまでで

$$
\left(1 + (N_+ - N_-)e^{-\mathrm{i}\theta}\varepsilon\hat{L} + \frac{(N_+ - N_-)^2 - (N_+ + N_-)}{2}e^{-2\mathrm{i}\theta}\varepsilon^2\hat{L}^2 \right)|\psi\rangle \tag{5.33}
$$

となる．ここで，右辺の $(N_+ - N_-)^2 - (N_+ + N_-)$ については，アンサンブル平均と分散がともに τ より高次のオーダーになることを示せるので，無視できる．一方，$N_+ - N_-$ は τ の一次までのオーダーで，そのアンサンブル平均は $E[N_+ - N_-] = 2\langle L_\theta \rangle \tau/\varepsilon$，分散は τ/ε^2 となる．そこで

$$\Delta W := \varepsilon\left((N_+ - N_-) - E[N_+ - N_-]\right) \tag{5.34}$$

と定義する．τ の間に $+$ と $-$ が測定される回数が十分大きいとすると，中心極限定理より，ΔW はアンサンブル平均 0 で分散 τ のガウス分布とみなすことができる．このとき (5.33) は

$$(1 + 2\langle \hat{L}_\theta \rangle e^{-\mathrm{i}\theta}\hat{L}\tau + e^{-\mathrm{i}\theta}\hat{L}\Delta W)|\psi\rangle \tag{5.35}$$

となる．したがって (5.32) の右辺の分母の二乗は

$$\|(1 + e^{-\mathrm{i}\theta}\varepsilon\hat{L})^{N+}(1 - e^{-\mathrm{i}\theta}\varepsilon\hat{L})^{N-}|\psi\rangle\|^2 = 1 + 4\langle \hat{L}_\theta \rangle^2\tau + \langle \hat{L}^\dagger\hat{L} \rangle\tau + 2\langle \hat{L}_\theta \rangle \Delta W \tag{5.36}$$

となる．ここで $\Delta W^2 = \tau$ という伊藤公式に従う変形を用いた．以上より

$$|\psi'\rangle = |\psi\rangle + \left(-\frac{\hat{L}^\dagger\hat{L}}{2} + \langle \hat{L}_\theta \rangle e^{-\mathrm{i}\theta}\hat{L} - \frac{\langle \hat{L}_\theta \rangle^2}{2}\right)|\psi\rangle\tau + \left(e^{-\mathrm{i}\theta}\hat{L} - \langle \hat{L}_\theta \rangle\right)|\psi\rangle\Delta W \tag{5.37}$$

を得る．したがって，$\tau \to 0$ の極限で（添え字 $_\mathrm{c}$ を再び付けて）

$$d|\psi_\mathrm{c}\rangle = \left(-\frac{\hat{L}^\dagger\hat{L}}{2} + \langle \hat{L}_\theta \rangle_\mathrm{c} e^{-\mathrm{i}\theta}\hat{L} - \frac{\langle \hat{L}_\theta \rangle_\mathrm{c}^2}{2}\right)|\psi_\mathrm{c}\rangle dt + \left(e^{-\mathrm{i}\theta}\hat{L} - \langle \hat{L}_\theta \rangle_\mathrm{c}\right)|\psi_\mathrm{c}\rangle \cdot dW \tag{5.38}$$

となる．これがガウシアン極限のホモダイン測定の確率シュレーディンガー方程式である．ここで dW は

$$E[dW] = 0,\ dW^2 = dt \tag{5.39}$$

を満たすウィーナー増分であり，(5.38) の右辺における $\cdot$ は伊藤型の積を表す．なお，(5.38) の右辺は $|\beta|$ に依存しなくなっている．

$+$ と $-$ が測定された回数の差 $\Delta y := N_+ - N_-$ は，

$$\Delta y = 2|\beta|\langle L_\theta \rangle_\mathrm{c}\tau + |\beta|\Delta W \tag{5.40}$$

を満たす．これは，$\tau \to 0$ の極限で

$$\frac{dy}{2|\beta|} = \langle \hat{L}_\theta \rangle_\mathrm{c} dt + \frac{1}{2}dW \tag{5.41}$$

となる．ここから，dW は測定結果に加わるノイズという物理的意味をもつことが分かる．このアンサンブル平均を考えると

$$\frac{1}{2|\beta|}E[dy] = E[\langle \hat{L}_\theta \rangle_\mathrm{c}]dt \tag{5.42}$$

となり，dy から $\hat{L}_\theta$ の期待値が分かる．

同様に，確率マスター方程式は

$$d\hat{\rho}_{\mathrm{c}} = \left(\hat{L}\hat{\rho}_{\mathrm{c}}\hat{L}^{\dagger} - \frac{1}{2}\{\hat{L}^{\dagger}\hat{L}, \hat{\rho}_{\mathrm{c}}\}\right)dt + (e^{-\mathrm{i}\theta}\hat{L}\hat{\rho}_{\mathrm{c}} + \hat{\rho}_{\mathrm{c}}\hat{L}^{\dagger}e^{\mathrm{i}\theta} - 2\langle\hat{L}_{\theta}\rangle_{\mathrm{c}}\hat{\rho}_{\mathrm{c}})\cdot dW \tag{5.43}$$

となる*3)．このアンサンブル平均は，· が伊藤型の積であることと $E[dW]=0$ から簡単に計算することができ，$\hat{\rho} := E[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}]$ とおくと

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \hat{L}\hat{\rho}\hat{L}^{\dagger} - \frac{1}{2}\{\hat{L}^{\dagger}\hat{L}, \hat{\rho}\} \tag{5.44}$$

となる．これは量子マスター方程式に他ならない．すなわち，(5.43) は (5.44) のアンラベリングの一つである．

なお，検出器の効率が 1 でない場合は以下のように考えることができる．+ と − の検出器の効率がいずれも η $(0 < \eta \leq 1)$ であるとしよう．このとき，$N_+ - N_-$ のアンサンブル平均は $E[N_+ - N_-] = 2\eta\langle L_\theta\rangle\tau/\varepsilon$，分散は $\eta\tau/\varepsilon^2$ となる．そこで

$$\Delta W := \frac{\varepsilon}{\sqrt{\eta}}\left((N_+ - N_-) - E[N_+ - N_-]\right) \tag{5.45}$$

と定義し，$\tau \to 0$ の極限で $\Delta W \to dW$ とする．これは $dW^2 = dt$ を満たすウィーナー増分となる．したがって，(5.41) に対応して

$$\frac{dy}{2|\beta|} = \eta\langle\hat{L}_{\theta}\rangle_{\mathrm{c}}dt + \frac{\sqrt{\eta}}{2}dW \tag{5.46}$$

が得られる．また 5.1.1 節でも議論したように，$1-\eta$ の確率で検出されなかった場合についてはアンサンブル平均をとると，(5.43) に対応して

$$d\hat{\rho}_{\mathrm{c}} = \left(\hat{L}\hat{\rho}_{\mathrm{c}}\hat{L}^{\dagger} - \frac{1}{2}\{\hat{L}^{\dagger}\hat{L}, \hat{\rho}_{\mathrm{c}}\}\right)dt + \sqrt{\eta}(e^{-\mathrm{i}\theta}\hat{L}\hat{\rho}_{\mathrm{c}} + \hat{\rho}_{\mathrm{c}}\hat{L}^{\dagger}e^{\mathrm{i}\theta} - 2\langle\hat{L}_{\theta}\rangle_{\mathrm{c}}\hat{\rho}_{\mathrm{c}})\cdot dW \tag{5.47}$$

が得られる．これが検出効率が η の場合の確率マスター方程式である．もちろん，(5.47) のアンサンブル平均は量子マスター方程式 (5.44) になる．また，検出効率がゼロ（すなわち $\eta \to 0$）の極限で，(5.47) は（アンサンブル平均をとらなくても）量子マスター方程式 (5.44) と一致する．

5.2.2 QND 測定

ガウシアン極限のホモダイン測定の特別な場合として，物理量 $\hat{X}$ の QND 測定を考える．リンドブラッド演算子を $\hat{L} = \sqrt{\gamma}\hat{X}$ として，$\theta = 0$ の場合を考える．確率シュレーディンガー方程式と確率マスター方程式はそれぞれ

$$d|\psi_{\mathrm{c}}\rangle = -\frac{\gamma}{2}(\hat{X} - \langle\hat{X}\rangle)^2|\psi_{\mathrm{c}}\rangle dt + \sqrt{\gamma}(\hat{X} - \langle\hat{X}\rangle)|\psi_{\mathrm{c}}\rangle\cdot dW, \tag{5.48}$$

$$d\hat{\rho}_{\mathrm{c}} = -\frac{\gamma}{2}[\hat{X}, [\hat{X}, \hat{\rho}_{\mathrm{c}}]]dt + \sqrt{\gamma}[\hat{X}\hat{\rho}_{\mathrm{c}} + \hat{\rho}_{\mathrm{c}}\hat{X} - 2\langle\hat{X}\rangle\hat{\rho}_{\mathrm{c}}]\cdot dW \tag{5.49}$$

となる．

$\hat{X}$ の固有値を x_i として，対応する固有ベクトルを $|x_i\rangle$ とする．$|\psi_{\mathrm{c}}\rangle = |x_i\rangle$ のとき，確

*3) (5.43) のような形の確率マスター方程式は，ベラフキン（V.P. Belavkin）[55] によって最初に議論されたため，ベラフキン方程式（**Belavkin equation**）とも呼ばれる．

率シュレーディンガー方程式は $d|\psi_c\rangle = 0$ となることが分かる．ここで，右辺は dW の係数も含めて完全にゼロになっている．すなわち，固有ベクトルは QND 測定で時間発展しないことが確かめられる．このとき，対応する測定結果は

$$\frac{dy}{2|\beta|} = \sqrt{\gamma}x_i dt + \frac{1}{2}dW \tag{5.50}$$

となり，測定結果にはノイズが乗ることが分かる．

次に確率マスター方程式を考えよう．$\langle\hat{X}\rangle_c := \mathrm{tr}[\hat{\rho}_c]\hat{X}$ に対して，

$$d\langle\hat{X}\rangle_c = 2\sqrt{\gamma}(\langle\hat{X}^2\rangle_c - \langle\hat{X}\rangle_c^2)\cdot dW \tag{5.51}$$

が成り立つ．また，伊藤公式を使うと

$$\begin{aligned} d(\langle\hat{X}^2\rangle_c - \langle\hat{X}\rangle_c^2) =& -4\gamma(\langle\hat{X}^2\rangle_c - \langle\hat{X}\rangle_c^2)^2 dt \\ &+ 2\sqrt{\gamma}\langle(\hat{X} - \langle\hat{X}\rangle_c)^3\rangle_c \cdot dW \end{aligned} \tag{5.52}$$

が成り立つ．これらのアンサンブル平均は

$$dE[\langle\hat{X}\rangle_c] = 0, \tag{5.53}$$

$$dE[\langle\hat{X}^2\rangle_c - \langle\hat{X}\rangle_c^2] = -4\gamma(\langle\hat{X}^2\rangle_c - \langle\hat{X}\rangle_c^2)^2 dt \tag{5.54}$$

となる．すなわち，$E[\langle\hat{X}\rangle_c]$ は変化せず，$E[\langle\hat{X}^2\rangle_c - \langle\hat{X}\rangle_c^2]$ は $t\to\infty$ でゼロに収束することが分かる．後者は，$\langle\hat{X}^2\rangle_c - \langle\hat{X}\rangle_c^2$ がほとんど確実にゼロに収束することを示している．これは波束の収束に他ならない．

また，$p_{ci} := \langle x_i|\hat{\rho}_c|x_i\rangle$ とすると，確率マスター方程式より

$$dp_{ci} = 2\sqrt{\gamma}(x_i - \langle x\rangle_c)p_{ci}dW \tag{5.55}$$

となり，したがって

$$dE[p_{ci}] = 0 \tag{5.56}$$

となる．とくに，初期状態が確率 1 で $\hat{\rho}$ であるとする．この初期状態においては $E[p_{ci}] = \langle x_i|\hat{\rho}|x_i\rangle$ である．$t\to\infty$ の極限では，$\hat{\rho}$ はいずれかの i について $|x_i\rangle\langle x_i|$ に収束して，終状態においては $p_{ci} = 1$ である．すなわち，十分に時間がたてば状態は固有状態 $|x_i\rangle$ 収束し，その確率は $E[p_{ci}]$ である．(5.56) より $E[p_{ci}]$ は時間変化しないので，結局，初期状態に対してボルンの確率規則を適用して得られた確率 $\langle x_i|\hat{\rho}|x_i\rangle$ に従って，状態 $\hat{\rho}$ が $|x_i\rangle\langle x_i|$ に収束することが分かる．

QND 測定の具体的な方法

さて，以上のような QND 測定をどうやって実験的に実現するかを，もう少し具体的に考えてみよう．システムの演算子 $\hat{X}$ を QND 測定することを考える．このシステムが図 5.4 のようにキャビティに入っており*4)，システムとキャビティ内の電磁場が相互作用する．この相互作用ハミルトニアンが

*4)　キャビティの詳細については A.2 節を参照．

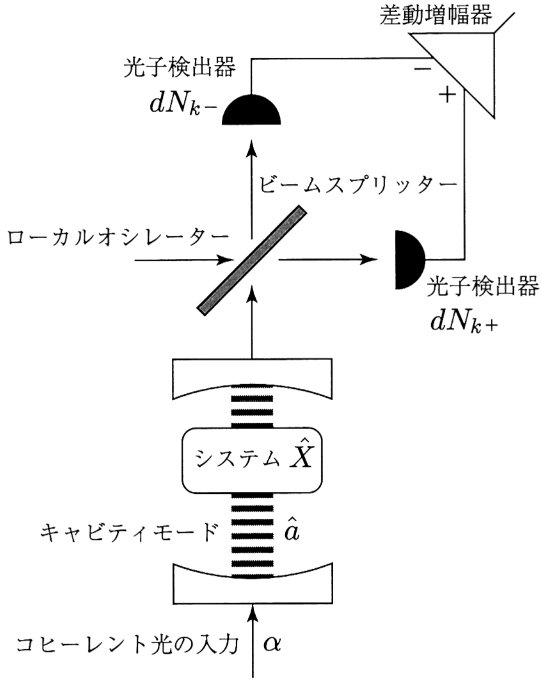


図 5.4 QND 測定の模式図．外部からキャビティへコヒーレント光を入力する．キャビティ内の電磁場モード $\hat{a}$ はシステム $\hat{X}$（二準位原子の場合は $\hat{X} = \hat{\sigma}_z$）と QND 型の相互作用 (5.57) をする．キャビティからの出力光はビームスプリッターでローカルオシレーターと混合され，その出力が光子検出器で検出される．その出力は差動増幅器に入力され，出力の差 $dN_{k+} - dN_{k-}$ が出力される．

$$\hat{H}_{\mathrm{init}} = \hbar\chi\hat{X}\hat{a}^\dagger\hat{a} \tag{5.57}$$

で与えられるとしよう．ここで $\chi > 0$ は定数，$\hat{a}$，$\hat{a}^\dagger$ はキャビティ内の電磁場の生成消滅演算子である．(5.57) は $\hat{X}$ についての QND 条件 (2.81) を満たしている．

相互作用ハミルトニアン (5.57) は，たとえば，システムが二準位原子で，キャビティモードとの離調が大きいときに実現される（付録 A.2.2 を参照）．この場合，$\hat{X}$ は二準位原子のパウリ演算子 $\hat{\sigma}_z$ である．また別の例として，キャビティ内の電磁場とキャビティのミラーの位置や，キャビティ内に置かれた離調の大きな原子の位置との相互作用も，(5.57) の形で表すことができる*5)．これらの場合の $\hat{X}$ は，ミラーや原子の重心の位置演算子に対応する．

さて，キャビティから出てきた光子を，ローカルオシレーター（別の電磁場のモードのコヒーレント光）と混合し，ホモダイン測定を行う（図 5.4 を参照）．このことによって，間接的にシステムの QND 測定を実現する．このとき，システムとキャビティ内の電磁場の合成系の密度演算子 $\hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}}$ が従う確率マスター方程式は，ガウス極限で

*5) ミラーの位置との相互作用は，電磁場の輻射圧によって生じる．また，原子の位置との相互作用は，キャビティ内の電磁波の強度が空間的に変化していることに由来する．詳しくは [56] などを参照．

$$
\begin{aligned}
d\hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}} =& -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H}_{\mathrm{int}}, \hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}}]dt + \kappa\left(\hat{a}\hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}}\hat{a}^{\dagger} - \frac{1}{2}\{\hat{a}^{\dagger}\hat{a}, \hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}}\}\right)dt \\
& - \mathrm{i}\sqrt{\kappa}(\hat{a}\hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}} - \hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}}\hat{a}^{\dagger} - \langle \hat{a} - \hat{a}^{\dagger}\rangle_{\mathrm{c}}\hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}}) \cdot dW
\end{aligned} \tag{5.58}
$$

と書くことができる[*6]．ここで，κ はキャビティ内外の電磁場の相互作用の強さを表している（κ^{-1} がキャビティの Q 値に対応する）．(5.58) は (5.43) で $\hat{L}$ を $\sqrt{\kappa}\hat{a}$ とおき，$\theta = 0$ としたものに他ならない．なおここでは，システムとコヒーレント光のそれぞれの自由ハミルトニアンについて相互作用表示をとっている．

さて，キャビティにはコヒーレント光が入力されているとしよう．このとき (5.58) の右辺に，入力光によってキャビティ内モードが駆動される効果が加わる．すなわち，α' を入力するコヒーレント光の振幅とすると，

$$
\begin{aligned}
d\hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}} =& -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H}_{\mathrm{int}}, \hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}}]dt + \kappa\left(\hat{a}\hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}}\hat{a}^{\dagger} - \frac{1}{2}\{\hat{a}^{\dagger}\hat{a}, \hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}}\}\right)dt \\
& + \sqrt{\kappa}[\alpha'\hat{a}^{\dagger} - \alpha'^{*}\hat{a}, \hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}}]dt - \mathrm{i}\sqrt{\kappa}(\hat{a}\hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}} - \hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}}\hat{a}^{\dagger} - \langle \hat{a} - \hat{a}^{\dagger}\rangle_{\mathrm{c}}\hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}}) \cdot dW
\end{aligned} \tag{5.59}
$$

となる（7.3.2 節も参照）．ここで $\alpha := 2\alpha'/\sqrt{\kappa}$ と定義すると，これを振幅とするコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ は

$$
\kappa\left(\hat{a}|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{a}^{\dagger} - \frac{1}{2}\{\hat{a}^{\dagger}\hat{a}, |\alpha\rangle\langle\alpha|\}\right) + \sqrt{\kappa}[\alpha'\hat{a}^{\dagger} - \alpha'^{*}\hat{a}, |\alpha\rangle\langle\alpha|] = 0 \tag{5.60}
$$

を満たす．すなわち，もしもシステムと電磁場の相互作用がなければ，$|\alpha\rangle\langle\alpha|$ は (5.59) のアンサンブル平均である量子マスター方程式の定常解である．この α に対して，A.1.2 節の (A.21) で定義される変位演算子 $\hat{D}(\alpha)$ を考える．これを用いて

$$
\hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}\prime} := \hat{D}^{\dagger}(\alpha)\hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}}\hat{D}(\alpha) \tag{5.61}
$$

と定義する（すなわちコヒーレント状態の分だけずらした密度演算子を定義する）と，(5.59) は，A.1.2 節の (A.22) を用いて

$$
\begin{aligned}
d\hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}\prime} =& -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H}'_{\mathrm{int}}, \hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}\prime}]dt + \kappa\left(\hat{a}\hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}\prime}\hat{a}^{\dagger} - \frac{1}{2}\{\hat{a}^{\dagger}\hat{a}, \hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}\prime}\}\right)dt \\
& - \mathrm{i}\sqrt{\kappa}(\hat{a}\hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}\prime} - \hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}\prime}\hat{a}^{\dagger} - \langle \hat{a} - \hat{a}^{\dagger}\rangle_{\mathrm{c}}\hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}\prime}) \cdot dW
\end{aligned} \tag{5.62}
$$

と書き直すことができる．ここで

$$
\hat{H}'_{\mathrm{int}} := \hbar\chi\hat{X}(\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \alpha\hat{a}^{\dagger} + \alpha^{*}\hat{a} + |\alpha|^2) \tag{5.63}
$$

とおいた．ここで $|\alpha|$ が十分に大きいと仮定する（すなわち，$|\alpha|^2 \gg \mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}\prime}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}]$ と仮定する）と，(5.63) の右辺のうち $\hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ の項は無視することができる．さらに，(5.63) の右辺のうち $|\alpha|^2$ の項は相互作用に寄与しないので，これも無視する．さらに，簡単のために α を実数とすると，結局 (5.62) は

*6）　右辺二行目の位相因子 $-\mathrm{i}$ は，論文 [56] と記号を合わせるために付けた．

$$
\begin{aligned}
d\hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}'} =& -\mathrm{i}\chi\alpha[\hat{X}(\hat{a}^\dagger+\hat{a}),\hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}'}]dt+\kappa\left(\hat{a}\hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}'}\hat{a}^\dagger-\frac{1}{2}\{\hat{a}^\dagger\hat{a},\hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}'}\}\right)dt \\
&-\mathrm{i}\sqrt{\kappa}(\hat{a}\hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}'}-\hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}'}\hat{a}^\dagger-\langle\hat{a}-\hat{a}^\dagger\rangle_{\mathrm{c}}\hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}'})\cdot dW
\end{aligned}
\tag{5.64}
$$

となる．

ここでさらに，キャビティ内の光子がロスするの時間スケール（Q 値の逆数）が，光子とシステムの相互作用の時間スケールに比べて十分短いと仮定する．すなわち，

$$
\varepsilon := \frac{\chi|\alpha|^2|\langle\hat{X}\rangle|}{\kappa} \ll 1 \tag{5.65}
$$

と仮定する．ここで $\langle\hat{X}\rangle$ は $\hat{X}$ の期待値である．このとき，キャビティ内の電磁場を断熱消去し，システムの密度演算子 $\hat{\rho}_{\mathrm{c}}$（すなわち，$\hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}'}$ のキャビティ内電磁場に関するトレースをとったもの）だけに関する確率マスター方程式を導きたい．そこで (5.64) を ε で展開する．その際，$\hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}'}$ における電磁場の状態の主要項は真空であり，ε^2 のオーダーまででは光子数が高々二個の状態の重ね合わせであると仮定する．これは $\hat{\rho}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{tot}}$ における電磁場の状態の主要項が $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ であることに対応している．やや面倒な計算の結果*7)，ε のリーディングオーダーでシステムだけに関する確率マスター方程式が得られ，それは

$$
d\hat{\rho}_{\mathrm{c}} = -\frac{2\chi^2|\alpha|^2}{\kappa}[\hat{X},[\hat{X},\hat{\rho}_{\mathrm{c}}]]dt+\frac{2\chi|\alpha|}{\sqrt{\kappa}}[\hat{X}\hat{\rho}_{\mathrm{c}}+\hat{\rho}_{\mathrm{c}}\hat{X}-2\langle\hat{X}\rangle\hat{\rho}_{\mathrm{c}}]\cdot dW \tag{5.66}
$$

で与えられることが分かる．これは $\hat{X}$ の QND 測定の確率マスター方程式 (5.49) において $\gamma = 4\chi^2|\alpha|^2/\kappa$ とおいたものに他ならない．

5.2.3 ヘテロダイン測定

次に，5.1.3 節で議論したヘテロダイン測定のガウス極限を考えよう．簡単のために本節では一つの k のみを考え，それに対応する ω_k を単に ω と書く．ポアソン過程の場合の (5.29) と (5.30) から出発して，5.2.1 節と同様の議論をすることにより，(5.43) に対応して

$$
\begin{aligned}
d\hat{\rho}_{\mathrm{c}} =& \left(\hat{L}\hat{\rho}_{\mathrm{c}}\hat{L}^\dagger-\frac{1}{2}\{\hat{L}^\dagger\hat{L},\hat{\rho}_{\mathrm{c}}\}\right)dt \\
&+(e^{-\mathrm{i}(\theta+\omega t)}\hat{L}\hat{\rho}_{\mathrm{c}}+\hat{\rho}_{\mathrm{c}}\hat{L}^\dagger e^{\mathrm{i}(\theta+\omega t)}-2\langle\hat{L}_\theta\cos(\omega t)+\hat{L}_{\theta+\pi/2}\sin(\omega t)\rangle_{\mathrm{c}}\hat{\rho}_{\mathrm{c}})\cdot dW
\end{aligned}
\tag{5.67}
$$

が得られる．また，測定結果は (5.41) に対応して

$$
\frac{dy}{2|\beta|} = \langle\hat{L}_\theta\cos(\omega t)+\hat{L}_{\theta+\pi/2}\sin(\omega t)\rangle_{\mathrm{c}}dt+\frac{1}{2}dW \tag{5.68}
$$

となる．

測定で知りたいのは $\hat{L}_\theta$ および $\hat{L}_{\theta+\pi/2}$ の期待値であった．そこで，(5.68) の $\cos(\omega t)$ および $\sin(\omega t)$ のフーリエ成分を取り出すために

$$
\begin{aligned}
\Delta y_\theta &:= \frac{1}{|\beta|}\int_0^\tau \cos(\omega t)dy(t), \\
\Delta y_{\theta+\pi/2} &:= \frac{1}{|\beta|}\int_0^\tau \sin(\omega t)dy(t)
\end{aligned}
\tag{5.69}
$$

*7）詳細な計算は [56] を参照．

と定義する．ここで $\tau := \omega^{-1}$ とおいた．さらに，τ はシステムのダイナミクスを特徴づける時間スケール $\tau_{\rm S}$ に比べて十分小さいと仮定する: $\tau \ll \tau_{\rm S}$．このとき，(5.69) は

$$\begin{aligned}\Delta y_\theta &= \langle \hat{L}_\theta \rangle_{\rm c} \tau + \int_0^\tau \cos(\omega t) dW(t), \\ \Delta y_{\theta+\pi/2} &= \langle \hat{L}_{\theta+\pi/2} \rangle_{\rm c} \tau + \int_0^\tau \sin(\omega t) dW(t)\end{aligned} \tag{5.70}$$

と書き直すことができる．ここで

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^\tau \cos(\omega t) dW(t)\right)^2 = \int_0^\tau \cos^2(\omega t) dt = \frac{\tau}{2}, \\ &\left(\int_0^\tau \sin(\omega t) dW(t)\right)^2 = \int_0^\tau \sin^2(\omega t) dt = \frac{\tau}{2}, \\ &\left(\int_0^\tau \cos(\omega t) dW(t)\right)\left(\int_0^\tau \sin(\omega t) dW(t)\right) = \int_0^\tau \cos(\omega t)\sin(\omega t) dt = 0\end{aligned} \tag{5.71}$$

が成り立つ．そこで

$$\Delta W_\theta(\tau) := \sqrt{2}\int_0^\tau \cos(\omega t) dW(t),\ \Delta W_{\theta+\pi/2}(\tau) := \sqrt{2}\int_0^\tau \sin(\omega t) dW(t) \tag{5.72}$$

と定義すると，$\tau \to 0$ の極限でこれらは独立なウィーナー増分とみなすことができる:

$$dW_\theta^2 = dt,\ \ dW_{\theta+\pi/2}^2 = dt,\ \ dW_\theta dW_{\theta+\pi/2} = 0. \tag{5.73}$$

以上により，(5.70) は $\tau \to 0$ の極限で

$$\begin{aligned}dy_\theta &= \langle \hat{L}_\theta \rangle_{\rm c} dt + \frac{1}{\sqrt{2}} dW_\theta, \\ dy_{\theta+\pi/2} &= \langle \hat{L}_{\theta+\pi/2} \rangle_{\rm c} dt + \frac{1}{\sqrt{2}} dW_{\theta+\pi/2}\end{aligned} \tag{5.74}$$

と書くことができる．すなわち，$\hat{L}_\theta$ と $\hat{L}_{\theta+\pi/2}$ を同時に測定した結果には，それぞれ独立なウィーナー増分が加わる．なお，(5.74) におけるウィーナー増分の係数は $1/\sqrt{2}$ なので，ホモダイン測定 (5.41) のときの $1/2$ よりも大きい．これは同時測定をすると余分にノイズが加わるという 2.3.3 節の議論に対応している．

さて，(5.67) の右辺のうち二行目の部分は，

$$\begin{aligned}&\Big[(e^{-{\rm i}\theta}\hat{L}\hat{\rho}_{\rm c} + \hat{\rho}_{\rm c}\hat{L}^\dagger e^{{\rm i}\theta} - 2\langle \hat{L}_\theta \rangle_{\rm c}\hat{\rho}_{\rm c})\cos(\omega t) \\ &+(e^{-{\rm i}(\theta+\pi/2)}\hat{L}\hat{\rho}_{\rm c} + \hat{\rho}_{\rm c}\hat{L}^\dagger e^{{\rm i}(\theta+\pi/2)} - 2\langle \hat{L}_{\theta+\pi/2} \rangle_{\rm c}\hat{\rho}_{\rm c})\sin(\omega t)\Big] \cdot dW\end{aligned} \tag{5.75}$$

と書ける．したがって，(5.67) は

$$\begin{aligned}d\hat{\rho}_{\rm c} = &\left(\hat{L}\hat{\rho}_{\rm c}\hat{L}^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{L}^\dagger\hat{L}, \hat{\rho}_{\rm c}\}\right)dt + \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-{\rm i}\theta}\hat{L}\hat{\rho}_{\rm c} + \hat{\rho}_{\rm c}\hat{L}^\dagger e^{{\rm i}\theta} - 2\langle \hat{L}_\theta \rangle_{\rm c}\hat{\rho}_{\rm c}) \cdot dW_\theta \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-{\rm i}(\theta+\pi/2)}\hat{L}\hat{\rho}_{\rm c} + \hat{\rho}_{\rm c}\hat{L}^\dagger e^{{\rm i}(\theta+\pi/2)} - 2\langle \hat{L}_{\theta+\pi/2} \rangle_{\rm c}\hat{\rho}_{\rm c}) \cdot dW_{\theta+\pi/2}\end{aligned} \tag{5.76}$$

となる．これがヘテロダイン測定の確率マスター方程式である．(5.76) のアンサンブル平均をとるとマスター方程式 (5.44) になる．すなわち，(5.76) は (5.44) のアンラベリング

の一つである．

5.2.4 数値計算手法

ガウス過程のホモダイン測定を記述する確率シュレーディンガー方程式 (5.38) を数値的にシミュレートする方法について，簡単に述べておこう*8)．とくに電磁場のように無限次元のシステムの場合は，確率シュレーディンガー方程式は確率偏微分方程式になり，数値的な取り扱いには注意を要する．

以下では簡単のため $\theta = 0$ とする．また，conditional を表す添え字の c は省略する．さらにシュレーディンガー表示をとり，自由ハミルトニアン $\hat{H}$ を陽に書くことにしよう．このとき

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_1(\psi) &:= -\mathrm{i}\hat{H}|\psi\rangle + \frac{1}{2}\left(-\hat{L}^\dagger\hat{L} + \langle\hat{L}+\hat{L}^\dagger\rangle\hat{L} - \frac{\langle\hat{L}+\hat{L}^\dagger\rangle^2}{4}\right)|\psi\rangle, \\
\mathcal{D}_2(\psi) &:= \left(\hat{L} - \frac{\langle\hat{L}+\hat{L}^\dagger\rangle}{2}\right)|\psi\rangle
\end{aligned}
\tag{5.77}
$$

とおくと，(5.38) は

$$
d|\psi\rangle = \mathcal{D}_1(\psi)dt + \mathcal{D}_2(\psi)\cdot dW \tag{5.78}
$$

と書ける．これを時刻 $t = 0$ から $t = \tau$ まで数値的に積分することを考えよう．N を大きな自然数として，時間を $\Delta t := \tau/N$ の幅で離散化する．$t_n := n\Delta t$ における数値解の値を $|\psi_n\rangle$ と書くことにする（$n = 0, 1, \cdots, N$）．

(5.78) を数値的に解く最も簡単な方法は**オイラー法**（**Euler's method**）である．この方法では，(5.78) を微小時間 Δt ごとに逐次的に積分していく:

$$
|\psi_{n+1}\rangle = |\psi_n\rangle + \mathcal{D}_1(\psi_n)\Delta t + \mathcal{D}_2(\psi_n)\Delta W_n. \tag{5.79}
$$

ここで ΔW_n は期待値が 0，分散が Δt のガウス分布であり，各時間ステップごとに独立に生成する．たとえば，**ボックス＝ミューラー法**（**Box-Muller's method**）で期待値 0，分散 1 のガウス分布に従う変数 ξ_n を生成し，

$$
\Delta W_n := \xi_n \Delta t \tag{5.80}
$$

とおく．なお，(5.78) における $\cdot dW$ が伊藤型の積であったことに注意．オイラー法による数値解 $|\psi_N\rangle$ と真の解 $|\psi(\tau)\rangle$ との差は，平均して Δt のオーダーである．この方法では，誤差が蓄積されていくために必ずしも精度の高い結果が得られるとは限らない．なお，確率微分方程式の場合は，四次の**ルンゲ＝クッタ法**（**Runge-Kutta method**）の収束も Δt のオーダーになることが知られている．

Δt に関して二次で収束する（すなわち，$|\psi_N\rangle$ と $|\psi(\tau)\rangle$ の差が平均して Δt^2 のオーダーになる）ことが保証されているのは，**プラテン法**（**Platen's method**）と呼ばれる方法である．この方法では次のように逐次的に (5.78) を解く:

*8） より詳しくは，文献 [21] などを参照．

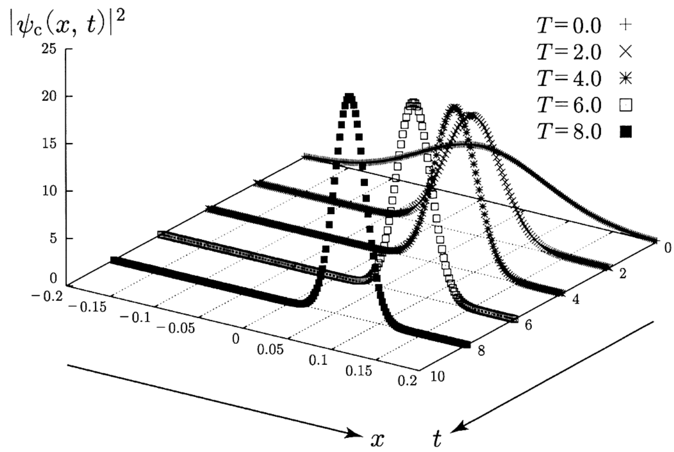


図 5.5　確率シュレーディンガー方程式の数値実験結果の一例．縦軸は $|\psi_c(x,t)|^2$ である．パラメータは $\gamma = 100$，$\sigma = 0.1$ とした．このデータは，箱嶋秀昭氏（東京大学大学院・総合文化研究科・清水明研究室）の提供による．

$$
\begin{aligned}
|\psi_{n+1}\rangle = |\psi_n\rangle &+ \frac{1}{2}\left(\mathcal{D}_1(\tilde{\psi}_n) + \mathcal{D}_1(\psi_n)\right)\Delta t \\
&+ \frac{1}{4}\left(\mathcal{D}_2(\psi_n^+) + \mathcal{D}_2(\psi_n^-) + 2\mathcal{D}_2(\psi_n)\right)\Delta W_n \\
&+ \frac{1}{4}\left(\mathcal{D}_2(\psi_n^+) - \mathcal{D}_2(\psi_n^-)\right)\left((\Delta W_n)^2 - \Delta t\right)\Delta t^{-1/2},
\end{aligned}
\tag{5.81}
$$

ここで

$$
|\tilde{\psi}_n\rangle = |\psi_n\rangle + \mathcal{D}_1(\psi_n)\Delta t + \mathcal{D}_2(\psi_n)\Delta W_n, \tag{5.82}
$$

$$
|\psi_n^{\pm}\rangle = |\psi_n\rangle + \mathcal{D}_1(\psi_n)\Delta t \pm \mathcal{D}_2(\psi_n)\Delta W_n. \tag{5.83}
$$

確率シュレーディンガー方程式の数値計算を行う際に，それが上手くいっているかどうかを確認するためには，状態ベクトルのノルムが 1 のまま保存されているかどうか等をチェックすることが必要である．

図 5.5 に，プラテン法を用いた確率シュレーディンガー方程式のシミュレーション結果の一例を示す．これは位置 $\hat{x}$ に対して QND 測定を行い，その結果として波動関数が徐々に収束していく様子を表している．位置表示の波動関数を $\psi_c(x,t)$ とすると，シミュレーションに用いた方程式と初期条件は

$$
d\psi_c(x,t) = -\frac{\gamma}{2}(x - \langle x\rangle_c)^2\psi_c(x,t) + \sqrt{\gamma}(x - \langle x\rangle_c)\psi_c(x,t)\cdot dW, \tag{5.84}
$$

$$
\psi_c(x,0) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{1/4}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{5.85}
$$

である．

5.2.5　カルマンフィルタとの対応

本節では，ガウス過程の確率マスター方程式と，B.2.3 節で議論する古典軌道推定のカ

ルマンフィルタの間の対応関係を明らかにする*9)．ここでカルマンフィルタとは，誤差のある信号からもとの軌道を逐次的に推定する方法であり，広い分野で応用されている．ただしこのような対応関係があるのは，システムが電磁場などで交換関係 $[\hat{x},\hat{p}]=\mathrm{i}/2$ を満たす直交位相振幅 $\hat{x}$ と $\hat{p}$ で記述される場合である．

簡単な場合として，自由ハミルトニアンは無視し，$\hat{x}$ を QND 測定する状況を考える．すなわち，5.2.2 節の (5.49) において $\hat{X}$ を $\hat{x}$ とする状況である．確率マスター方程式を改めて書くと

$$d\hat{\rho}_{\mathrm{c}}=-\frac{\gamma}{2}[\hat{x},[\hat{x},\hat{\rho}_{\mathrm{c}}]]dt+4\sqrt{\gamma}\left[\frac{\hat{x}\hat{\rho}_{\mathrm{c}}+\hat{\rho}_{\mathrm{c}}\hat{x}}{2}-\langle\hat{x}\rangle_{\mathrm{c}}\hat{\rho}_{\mathrm{c}}\right]\cdot d\nu \tag{5.86}$$

である．ここで，$d\nu^2=dt/4$ を満たすウィーナー増分 $d\nu$ を導入した．また，測定結果は ($2|\beta|$ で規格化して)

$$dy=\sqrt{\gamma}\langle\hat{x}\rangle_{\mathrm{c}}+d\nu \tag{5.87}$$

となる．

さて，条件付きの対称化共分散行列 V_{c}^{ij} を

$$\begin{aligned}&V_{\mathrm{c}}^{xx}:=\langle\hat{x}^2\rangle_{\mathrm{c}}-\langle\hat{x}\rangle_{\mathrm{c}}^2,\ V_{\mathrm{c}}^{pp}:=\langle\hat{p}^2\rangle_{\mathrm{c}}-\langle\hat{p}\rangle_{\mathrm{c}}^2,\\ &V_{\mathrm{c}}^{xp}=V_{\mathrm{c}}^{px}:=\frac{\langle\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x}\rangle_{\mathrm{c}}}{2}-\langle\hat{x}\rangle_{\mathrm{c}}\langle\hat{p}\rangle_{\mathrm{c}}\end{aligned} \tag{5.88}$$

と定義する．これを用いると，$\langle\hat{x}\rangle_{\mathrm{c}}$ と $\langle\hat{p}\rangle_{\mathrm{c}}$ の時間発展は

$$d\langle\hat{x}\rangle_{\mathrm{c}}=4\sqrt{\gamma}V_{\mathrm{c}}^{xx}\cdot d\nu, \tag{5.89}$$

$$d\langle\hat{p}\rangle_{\mathrm{c}}=4\sqrt{\gamma}V_{\mathrm{c}}^{xp}\cdot d\nu \tag{5.90}$$

と書ける（なお (5.89) は (5.51) そのものである）．さらに，V_{c}^{ij} の時間発展も容易に求めることができ，それぞれ

$$dV_{\mathrm{c}}^{xx}=-4\gamma(V_{\mathrm{c}}^{xx})^2dt+4\sqrt{\gamma}\langle(\hat{x}-\langle\hat{x}\rangle_{\mathrm{c}})^3\rangle_{\mathrm{c}}\cdot d\nu, \tag{5.91}$$

$$\begin{aligned}dV_{\mathrm{c}}^{pp}=&\frac{\gamma}{4}dt-4\gamma(V_{\mathrm{c}}^{xp})^2dt\\ &+4\sqrt{\gamma}\left(\frac{\langle\hat{x}\hat{p}^2+2\hat{p}\hat{x}\hat{p}+\hat{p}^2\hat{x}\rangle_{\mathrm{c}}}{4}-2\langle\hat{p}\rangle_{\mathrm{c}}\frac{\langle\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x}\rangle_{\mathrm{c}}}{2}-\langle\hat{x}\rangle_{\mathrm{c}}\langle\hat{p}^2\rangle_{\mathrm{c}}+2\langle\hat{x}\rangle_{\mathrm{c}}\langle\hat{p}\rangle_{\mathrm{c}}^2\right)\cdot d\nu,\end{aligned} \tag{5.92}$$

$$\begin{aligned}dV_{\mathrm{c}}^{xp}=&-4\gamma V_{\mathrm{c}}^{xx}V_{\mathrm{c}}^{xp}dt\\ &+4\sqrt{\gamma}\left(\frac{\langle\hat{x}^2\hat{p}+\hat{x}\hat{p}\hat{x}+\hat{p}\hat{x}^2\rangle_{\mathrm{c}}}{4}-2\langle\hat{x}\rangle_{\mathrm{c}}\frac{\langle\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x}\rangle_{\mathrm{c}}}{2}-\langle\hat{p}\rangle_{\mathrm{c}}\langle\hat{x}^2\rangle_{\mathrm{c}}+2\langle\hat{x}\rangle_{\mathrm{c}}\langle\hat{p}\rangle_{\mathrm{c}}^2\right)\cdot d\nu\end{aligned} \tag{5.93}$$

となる（(5.91) は (5.52) そのものである）．ここで，(5.91) の右辺第二項は $\hat{x}^3$ のキュムラント，(5.92) の右辺第二項は $\hat{x}\hat{p}^2$ の対称化キュムラント，(5.93) の右辺第二項は $\hat{x}^2\hat{p}$ の

*9) 古典制御理論では，相空間の点やその軌道を推定することを「状態推定」と呼ぶことが多い．しかし，量子論においては「状態」は状態ベクトルや密度演算子で記述され，これは古典論においては相空間の点ではなく確率分布に対応する．用語の混乱を避けるため，本書では古典的な軌道の推定を「状態推定」と呼ぶのは避けることにする．

対称化キュムラントである．あとでさらに議論するように，$\hat{\rho}_{\rm c}$ の初期状態がガウス状態なら*10)，時間発展してもガウス状態であり，その場合はこれらのキュムラントはゼロになる．このとき，(5.91)，(5.92)，(5.93) はそれぞれ

$$dV_{\rm c}^{xx} = -4\gamma(V_{\rm c}^{xx})^2 dt, \tag{5.94}$$

$$dV_{\rm c}^{pp} = \frac{\gamma}{4}dt - 4\gamma(V_{\rm c}^{xp})^2 dt, \tag{5.95}$$

$$dV_{\rm c}^{xp} = -4\gamma V_{\rm c}^{xx} V_{\rm c}^{xp} dt \tag{5.96}$$

と，いずれも常微分方程式になる．これらは**リカッチ方程式**（**Ricatti equation**）と呼ばれる*11)．(5.94)，(5.95)，(5.96) と (5.89)，(5.90) を合わせると，$\langle\hat{x}\rangle_{\rm c}$，$\langle\hat{p}\rangle_{\rm c}$，$V_{\rm c}^{xx}$，$V_{\rm c}^{pp}$，$V_{\rm c}^{xp}$ が閉じた連立方程式を構成することが分かる．

以上の議論を，B.2.3 節で議論する古典カルマンフィルタと比較してみよう．古典変数 x と p の時間発展が

$$dx = 0, \quad dp = \frac{\sqrt{\gamma}}{2}dW \tag{5.97}$$

で時間発展するとしよう．ここで dW はウィーナー増分である（$dW^2 = dt$）．ここで x に対して

$$dy = \sqrt{\gamma}x dt + d\nu \tag{5.98}$$

という測定をする．ここで $d\nu$ は dW とは独立なウィーナー増分であり，$d\nu^2 = dt/4$ を満たす．時刻 t までの測定結果に条件付けられた (x,p) の時刻 t における条件付き分布を $P_{\rm c}[x,p;t]$ とする．イノベーション過程の観点から (B.110) の形に (5.98) を書けば，

$$dy = \sqrt{\gamma}\langle x\rangle_{\rm c} dt + d\nu \tag{5.99}$$

となる．ここで $\langle\cdots\rangle_{\rm c}$ は条件付きの期待を表す．このとき，クスナー方程式（測定結果の時系列に基づいて推定された確率分布の時間発展を記述する方程式）は，

$$\frac{\partial P_{\rm c}}{\partial t} = \frac{\gamma}{8}\frac{\partial^2 P_{\rm c}}{\partial p^2} + 4\sqrt{\gamma}(x - \langle x\rangle_{\rm c})P_{\rm c}\cdot d\nu \tag{5.100}$$

となる．条件付きの共分散行列 $\tilde{V}_{\rm c}^{ij}$ を

$$\tilde{V}_{\rm c}^{xx} := \langle x^2\rangle_{\rm c} - \langle x\rangle_{\rm c}^2,\ \tilde{V}_{\rm c}^{pp} := \langle p^2\rangle_{\rm c} - \langle p\rangle_{\rm c}^2,\ \tilde{V}_{\rm c}^{xp} = \tilde{V}_{\rm c}^{px} := \langle xp\rangle_{\rm c} - \langle x\rangle_{\rm c}\langle p\rangle_{\rm c} \tag{5.101}$$

と定義すると，$\langle x\rangle_{\rm c}$ と $\langle p\rangle_{\rm c}$ の時間発展は

$$d\langle x\rangle_{\rm c} = 4\gamma\sqrt{\gamma}\tilde{V}_{\rm c}^{xx}\cdot d\nu, \tag{5.102}$$

$$d\langle p\rangle_{\rm c} = 4\gamma\sqrt{\gamma}\tilde{V}_{\rm c}^{xp}\cdot d\nu \tag{5.103}$$

と書ける．$\tilde{V}_{\rm c}^{ij}$ の時間発展は

$$d\tilde{V}_{\rm c}^{xx} = -4\gamma(\tilde{V}_{\rm c}^{xx})^2 dt + 4\sqrt{\gamma}\langle(x - \langle x\rangle_{\rm c})^3\rangle_{\rm c}\cdot d\nu, \tag{5.104}$$

*10)　ガウス状態については，付録 A.1.3 を参照．
*11)　古典軌道推定におけるリカッチ方程式については，付録 B.2 を参照．

$$
\begin{aligned}
d\tilde{V}_{\mathrm{c}}^{pp} &= \frac{\gamma}{4}dt - 4\gamma(\tilde{V}_{\mathrm{c}}^{xp})^2 dt \\
&\quad + 4\sqrt{\gamma}\left(\langle xp^2\rangle_{\mathrm{c}} - 2\langle p\rangle_{\mathrm{c}}\langle xp\rangle_{\mathrm{c}} - \langle x\rangle_{\mathrm{c}}\langle p^2\rangle_{\mathrm{c}} + 2\langle x\rangle_{\mathrm{c}}\langle p\rangle_{\mathrm{c}}^2\right)\cdot d\nu,
\end{aligned} \tag{5.105}
$$

$$
\begin{aligned}
d\tilde{V}_{\mathrm{c}}^{xp} &= -4\gamma\tilde{V}_{\mathrm{c}}^{xx}\tilde{V}_{\mathrm{c}}^{xp}dt \\
&\quad + 4\sqrt{\gamma}\left(\langle x^2p\rangle_{\mathrm{c}} - 2\langle x\rangle_{\mathrm{c}}\langle xp\rangle_{\mathrm{c}} - \langle p\rangle_{\mathrm{c}}\langle x^2\rangle_{\mathrm{c}} + 2\langle x\rangle_{\mathrm{c}}\langle p\rangle_{\mathrm{c}}^2\right)\cdot d\nu
\end{aligned} \tag{5.106}
$$

となる．ここで，(5.104)，(5.105)，(5.106) の右辺第二項は，それぞれ x^3，xp^2，x^2p のキュムラントである．(x,p) の初期分布がガウス分布なら，これらのキュムラントはゼロになる．

以上のように，量子系におけるガウス過程の確率マスター方程式と，古典系におけるカルマンフィルタの間には，顕著な対応がある．まず，(5.86) と (5.100) が対応している．ここで古典系における (5.100) の右辺第一項（すなわち，$dp = (\sqrt{\gamma}/2)dW$ に由来する項）は，量子系の場合の測定の反作用（すなわち，$-(\gamma/2)[\hat{x},[\hat{x},\hat{\rho}_{\mathrm{c}}]]dt$ の項が $\hat{p}$ に及ぼす影響）を表していると解釈できる．そして，(5.87) と (5.99)，(5.89) と (5.102)，$\cdots$，(5.93) と (5.106) がそれぞれ対応している．ただし，量子系のダイナミクスにおいて x と p に対応する古典変数（隠れた変数）が「実在」しているわけではない*12)．にもかかわらずこのような明確な対応がある理由は，以下のようにウィグナー関数の観点から理解することもできる．

確率マスター方程式 (5.86) で記述される量子系のダイナミクスを，時刻 t におけるウィグナー関数 $W_{\mathrm{c}}(x,p;t)$ の時間発展で記述しよう．A.1.3 節で述べた対応関係 (A.36) により，これは

$$
\frac{\partial W_{\mathrm{c}}}{\partial t} = \frac{\gamma}{8}\frac{\partial^2 W_{\mathrm{c}}}{\partial p^2} + 4\sqrt{\gamma}(x - \langle x\rangle_{\mathrm{c}})W_{\mathrm{c}}\cdot d\nu \tag{5.107}
$$

となる．これは (5.100) とまったく同じ形をしている．A.1.3 節で議論したようにウィグナー関数から計算されるキュムラントは対称化キュムラントなので，古典系で (5.100) から (5.102)～(5.106) を導いたのとまったく同じ計算を (5.107) に対して行えば，(5.89)～(5.93) が導かれることが分かる．また，古典系の場合は，ガウス分布が (5.100) に従って時間発展するとガウス分布のままであった．したがって量子系の場合も，ウィグナー関数がガウス分布であるようなガウス状態が (5.86) すなわち (5.107) にしたがって時間発展しても，やはりガウス状態のままであることが分かる．

表 5.1 に，量子系と古典系の対応関係を示す*13)．古典系における確率分布は，量子系における密度演算子に対応する．ガウス過程においてそれらの時間発展を記述するのは，古典系ではフォッカー・プランク方程式，量子系では量子マスター方程式である．また，連続測定の結果に基づいた条件付き確率分布，条件付き密度演算子の時間発展は，それぞれクスナー方程式，確率マスター方程式で記述される．古典系において物理量の条件付き期待値を求めることは，フィルタリングと呼ばれる．そのため量子系でも，確率マスター方程式が**量子フィルタリング方程式**（**quantum filtering equation**）と呼ばれること

*12) ここで隠れた変数とは，物理量 $\hat{x}$ と $\hat{p}$ の量子ゆらぎを記述する古典変数 (x,p) のことを意味する．一般に，相対論的な局所性をもつ隠れた変数があれば，必ずベルの不等式が満たされる．一方，量子論においては，エンタングルした状態においてベルの不等式が破れることが，実験的にも確かめられている．この意味で，局所的な隠れた変数は実在しない．詳しくは [3] などを参照．

*13) 詳しくは [23], [57], [58] などを参照．なお，古典系については付録 B.1 と B.2 も参照．

表 5.1　古典系における軌道推定と，量子系における連続測定（ガウス過程）の対応関係.

古典系	量子系
確率分布	密度演算子（ウィグナー関数）
フォッカー・プランク方程式	量子マスター方程式
クスナー方程式	確率マスター方程式
測定結果 dy［式 (B.110)］	測定結果 dy［式 (5.87)］
イノベーション過程 $d\nu$［式 (B.110)］	測定ノイズ $d\nu$［式 (5.87)］

がある*14). なお，本節では最も簡単な場合として，$\hat{x}$ の QND 測定とカルマンフィルタの対応を議論したが，より一般のホモダイン測定やヘテロダイン測定についても同様に，カルマンフィルタとの対応を考えることができる.

*14)　量子系におけるフィルタリングについては，[59], [60] なども参照.

第 6 章
量子フィードバック制御

量子系に対するフィードバック制御は，関心のある物理量の量子ゆらぎなどを圧搾して所望の量子状態を実現させるための有用な方法である．本章では，まず 6.1 節で量子フィードバック制御の基本的な考え方を述べ，次に 6.2 節で量子連続測定に基づくフィードバックについて述べる．6.3 節では量子最適制御の理論を述べる．なお，本章では簡単のため $\hbar = 1$ とする．

6.1　量子フィードバック制御の考え方

一般にフィードバック制御とは，システムに対する測定で得られた結果に基づいて，システムを次にどう制御するかを決めることである．模式的に描くと，図 6.1 のように，情報の流れが　システム→測定器→コントローラー→システム　と閉ループ（closed loop）になるのがフィードバック制御の特徴である．

さて**量子フィードバック制御**（**quantum feedback control**）とは，量子測定によって得られた結果を使って，システムを操作することである．たとえば，量子状態 $\hat{\rho}$ に対して，クラウス演算子 $\{\hat{M}_k\}$ で測定を行い，測定結果 k を得たとする．次にフィードバックとして，得た結果 k に依存するユニタリ操作 $\hat{U}_k$ を行う．このとき，フィードバック後の状態 $\hat{\rho}'$ は

$$\hat{\rho}' = \sum_k \hat{U}_k \hat{M}_k \hat{\rho} \hat{M}_k^\dagger \hat{U}_k^\dagger \tag{6.1}$$

と書くことができる．ここで，測定結果 k に条件付けられた密度演算子は，フィードバック後の状態において

$$\hat{\rho}_{\mathrm{c}}'(k) = \frac{1}{p_k} \hat{U}_k \hat{M}_k \hat{\rho} \hat{M}_k^\dagger \hat{U}_k^\dagger \tag{6.2}$$

となる．ここで $p_k := \mathrm{tr}[\hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k \hat{\rho}]$ である．k に関するアンサンブル平均を $E[\cdots]$ と書くと，$\hat{\rho}' = E[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}'(k)] := \sum_k p_k \hat{\rho}_{\mathrm{c}}'(k)$ となる．

具体例として，測定がある基底 $\{|\varphi_k\rangle\}_{k=0,1,\cdots}$ に対応する射影測定であるとする．さらに，$\hat{U}_k$ は，$|\varphi_k\rangle$ をある（k に依存しない）状態 $|\psi\rangle$ にするようなユニタリ操作であるとしよう（任意の二つの状態ベクトルはユニタリ変換で結べるので，このようなユニタリ変換は必ず存在する）．このとき，フィードバック後の状態は初期状態に依存せずに常に

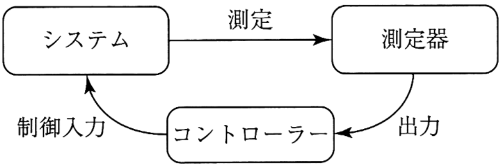


図 6.1　フィードバック制御の模式図．情報の流れが閉ループを描く．

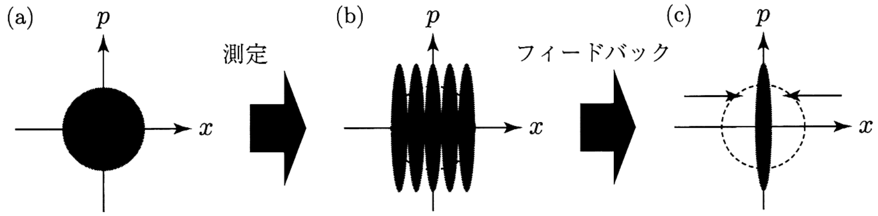


図 6.2　量子フィードバック制御の具体例の模式図．(a) 初期状態の真空の量子ゆらぎ．(b) $\hat{x}$ の測定後の状態．測定結果ごとに，期待値の異なるスクイズド状態が得られる．(c) フィードバック後の状態．測定結果に応じて状態をずらすことで，測定結果に依存せず期待値が 0 のスクイズド状態になる．

$\hat{\rho}' = |\psi\rangle\langle\psi|$ となる．このように，初期状態に依存せずに所望の状態を実現させられることが，フィードバック制御の顕著な特徴である．

上記の例において $|\psi\rangle = |\varphi_0\rangle$ としよう．いま，初期状態が $|\varphi\rangle := \sum_k c_k|\varphi_k\rangle$ という量子的な重ね合わせ状態だったなら，フィードバック後の状態ではこの重ね合わせがなくなっている．これは，フィードバックによって量子ゆらぎが圧搾されたことを意味している．

このことの直観的な意味を考えるために，次のような電磁場に対する量子フィードバック制御を考えよう（図 6.2 を参照）．初期状態は真空とする．そこで $\hat{x}$ を測定する．測定後の状態においては，測定結果に条件付けた $\hat{x}$ の量子ゆらぎは減少し，スクイズド状態が実現している．しかし，$\hat{x}$ の期待値は測定結果ごとにばらついているので，アンサンブル平均としては $\hat{x}$ の分散は減少していない（図 6.2 (b)）．一方，$\hat{p}$ の分散は測定の反作用によって増大する．次に，$\hat{x}$ の期待値が 0 になるように，平行移動のユニタリ変換をする．このためには，測定結果に応じて平行移動の向きと距離を変えないといけないので，これはフィードバック制御に他ならない．その結果，$\hat{x}$ の分散がアンサンブル平均をとった後でも減少する（図 6.2 (c)）．このように，フィードバックによって，測定結果によらず，期待値が 0 のスクイズド状態を実現することができる．このような量子ゆらぎの圧搾は，3.2.2 節で議論した量子精密計測などの際に有用であると考えられる．なお，このような量子フィードバック制御による量子ゆらぎの圧搾は，原子の集団スピンなどを用いて実験で実現されている*1)．

なお，初期状態が $\hat{\rho} = \sum_k q_k|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|$ という混合状態だったとしよう．このとき，

*1)　たとえば [61] を参照．

フィードバック後の状態が $\hat{\rho}' = |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|$ という純粋状態になれば，これはフィードバックによって古典的な確率混合がなくなったことを意味する．すなわち，古典ゆらぎ（たとえば，熱ゆらぎ）が圧搾されたことを意味する．このようなフィードバック制御は，統計力学の分野で知られている**マクスウェルのデーモン**（**Maxwell's demon**）と関連している*2)．

また，量子連続測定で得られた測定結果を連続的にフィードバックすることは，量子状態の安定化などのために有用である[57],[58]．たとえば有限次元系に対する連続的な量子フィードバック制御による固有状態の安定化が，[65]～[68] などで議論されている．以下では簡単のためにガウス過程の場合を議論するが，量子フィードバック制御はガウス過程に限らず広く有用である．

6.2 測定結果の直接フィードバック

量子連続測定を行って得た結果を，リアルタイムで連続的にフィードバックするような状況を考えよう．本節では，5.2.2 節で議論したガウス過程のホモダイン測定について，その測定結果を直接用いるフィードバック（すなわち，測定結果に比例したフィードバック）を考える*3)．簡単のために $\theta = 0$ の場合の確率マスター方程式 (5.43) を考える．ここで

$$\mathcal{L}[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)] := \hat{L}\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)\hat{L}^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{L}^\dagger\hat{L}, \hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)\}, \tag{6.3}$$

$$\langle\hat{L}_0(t)\rangle_{\mathrm{c}} := \frac{\mathrm{tr}[(\hat{L} + \hat{L}^\dagger)\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)]}{2}, \tag{6.4}$$

$$\mathcal{H}[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)] := \hat{L}\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t) + \hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)\hat{L}^\dagger - 2\langle\hat{L}_0(t)\rangle_{\mathrm{c}}\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t) \tag{6.5}$$

と定義すると，確率マスター方程式は

$$d\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t) = \mathcal{L}[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)]dt + \mathcal{H}[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)] \cdot dW(t) \tag{6.6}$$

と書ける．ここで dW は $dW^2 = dt$ を満たすウィーナー増分である．また測定結果は，(5.41) の左辺の $dy/(2|\beta|)$ を改めて dy と書くと

$$dy(t) = \langle\hat{L}_0(t)\rangle_{\mathrm{c}}dt + \frac{1}{2}dW(t) \tag{6.7}$$

となる．

この測定結果を連続的にフィードバックする状況を考える．制御に用いるハミルトニアンを $\hat{H}$ として，その大きさを測定結果に比例して変化させるフィードバックを考える．このフィードバックの時間遅れを $\tau > 0$ とする．すなわち，時刻 $t - \tau$ における測定結果を時刻 t にフィードバックする状況を考える．

---

*2)　たとえば，[34], [62]～[64] を参照．

*3)　本節の内容は，Wiseman と Milburn の論文[69]の議論をもとにしている．彼らはポアソン過程についても同様に，直接フィードバックを定式化している[23]．一方で Gough と James は，ポアソン過程の場合は Wiseman と Milburn の議論は正しくないとして，異なる定式化を提案している[70]．どちらが正しいかについては議論の余地がある．ただし，本節で議論するガウス過程の場合に限っては，両者の結果は一致する．

$$\mathcal{K}[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)] := -\mathrm{i}[\hat{H}, \hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)] \tag{6.8}$$

とおくと，フィードバックによる時刻 t から $t+dt$ までの状態変化は

$$2\mathcal{K}[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)] \circ dy(t-\tau) \tag{6.9}$$

で与えられる*4)．ここで，$\circ$ はストラトノビッチ積を表す*5)．このとき，フィードバックを含めた全体の確率マスター方程式は

$$d\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t) = \mathcal{L}[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)]dt + \mathcal{H}[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)] \cdot dW(t) + 2\mathcal{K}[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)] \circ dy(t-\tau) \tag{6.10}$$

で与えられる．

(6.9) において伊藤積ではなくストラトノビッチ積を用いる理由は以下の通りである．$dy(t)$ には特異性をもつ項 $dW(t)$ が含まれているが，物理的には，実際の測定結果は完全には特異的ではない（ある程度滑らかな）関数であると考えられる．そこで，滑らかな測定結果を用いたフィードバック $2\mathcal{K}[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)]dy(t-\tau)$ をまず考え，そのあとで特異性が現れる極限を考えると，数学の定理[77]より (6.9) のようなストラトノビッチ型の積が得られる*6)．もう一つの理由として，もしも (6.9) で伊藤積を用いると，後述するように，得られる量子マスター方程式がリンドブラッド型ではなくなり，物理的ではない結果を与えることが挙げられる．この意味でも，(6.9) ではストラトノビッチ積を用いるべきである．

ここで，ストラトノビッチ積 $\circ$ を伊藤積 $\cdot$ に変換しよう．まずストラトノビッチ積の定義より，

$$\begin{aligned}
&2\mathcal{K}[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)] \circ dy(t-\tau) \\
=&2\mathcal{K}\left[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t) + \frac{1}{2}d\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)\right] \cdot dy(t-\tau) \\
=&2\mathcal{K}\left[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t) + \frac{\mathcal{L}[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)]dt + \mathcal{H}[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)] \cdot dW(t) + 2\mathcal{K}[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)] \circ dy(t-\tau)}{2}\right] \cdot dy(t-\tau)
\end{aligned} \tag{6.11}$$

が成り立つ．全体として dt のオーダーまで考えると，三行目の $\mathcal{K}[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)] \circ dy(t-\tau)$ は $\mathcal{K}[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)] \cdot dy(t-\tau)$ で置き換えることができる．また，異なる時刻のウィーナー増分は独立なので $dW(t) \cdot dW(t-\tau) = 0$ であることに注意すると，

$$2\mathcal{K}[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)] \circ dy(t-\tau) = 2\mathcal{K}[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)] \cdot dy(t-\tau) + \frac{1}{2}\mathcal{K}^2[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)]dt \tag{6.12}$$

が得られる．ここで $\mathcal{K}[\mathcal{K}[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}]]$ を $\mathcal{K}^2[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}]$ と略記した．以上より，(6.10) を伊藤積に変換すると

$$d\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t) = \left(\mathcal{L}[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)] + \frac{1}{2}\mathcal{K}^2[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)]\right)dt + \mathcal{H}[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)] \cdot dW(t) + 2\mathcal{K}[\hat{\rho}_{\mathrm{c}}(t)] \cdot dy(t-\tau) \tag{6.13}$$

---

*4) ここで 2 は，論文 [69] と合わせるために付けた比例定数であり，深い意味はない．

*5) ストラトノビッチ積について，詳しくは付録 B.1.6 を参照

*6) 特異性のある測定結果を (6.9) のように直接フィードバックする際は，実用上も注意を要する．特異性に起因する問題を避けるため，測定結果をローパスフィルタ（高周波のフーリエ成分を減衰させ，低周波数のフーリエ成分だけを主に取り出すフィルタ）に通し，特異性を弱めた信号をフィードバックに使うということも行われる．

となることが分かる．

次に，時間遅れがないマルコフ的なフィードバックの場合，すなわち $\tau \to +0$ の極限を考えよう．ここで，「測定をしてからフィードバックをする」という因果律を保つ必要があるので，極限操作に注意を要する．そこでまず，因果律を明確にするために (6.13) を

$$\hat{\rho}_{\rm c}(t) + d\hat{\rho}_{\rm c}(t) = \left(1 + 2dy(t-\tau)\cdot\mathcal{K} + \frac{dt}{2}\mathcal{K}^2\right)(1 + dt\mathcal{L} + dW(t)\cdot\mathcal{H})\,[\hat{\rho}_{\rm c}(t)] \quad (6.14)$$

と書き直す．ここで $dW(t-\tau)\cdot dW(t) = 0$ を用いた．「測定してからフィードバックをする」という順序が，(6.14) における演算子 $\mathcal{K}$ や $\mathcal{H}$ の積の順序に反映されている．そこで (6.14) において $\tau \to +0$ とすると，

$$\hat{\rho}_{\rm c}(t) + d\hat{\rho}_{\rm c}(t) = \left(1 + 2dy(t)\cdot\mathcal{K} + \frac{dt}{2}\mathcal{K}^2\right)(1 + dt\mathcal{L} + dW(t)\cdot\mathcal{H})\,[\hat{\rho}_{\rm c}(t)] \quad (6.15)$$

となる．ここに (6.7) などを代入して整理すると，

$$\begin{aligned} d\hat{\rho}_{\rm c}(t) =& \mathcal{L}[\hat{\rho}_{\rm c}(t)]dt + \frac{1}{2}\mathcal{K}^2[\hat{\rho}_{\rm c}(t)]dt + \mathcal{K}[\hat{L}\hat{\rho}_{\rm c}(t) - \hat{\rho}_{\rm c}(t)\hat{L}^\dagger]dt \\ &+ (\mathcal{H}[\hat{\rho}_{\rm c}(t)] + \mathcal{K}[\hat{\rho}_{\rm c}(t)])\cdot dW \end{aligned} \quad (6.16)$$

が得られる．これが，マルコフ的なフィードバックを記述する確率マスター方程式である．(6.16) のアンサンブル平均をとると，$\hat{\rho}(t) := E[\hat{\rho}_{\rm c}(t)]$ についての量子マスター方程式

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \mathcal{L}[\hat{\rho}(t)] + \frac{1}{2}\mathcal{K}^2[\hat{\rho}(t)] + \mathcal{K}[\hat{L}\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{L}^\dagger] \quad (6.17)$$

が得られる．右辺の第二項と第三項がフィードバックの効果を表している．ここに $\mathcal{K}$ などの具体的な表式を代入すると，

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} =& \hat{L}\hat{\rho}(t)\hat{L}^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{L}^\dagger\hat{L}, \hat{\rho}(t)\} \\ &- \frac{1}{2}[\hat{H}, [\hat{H}, \hat{\rho}(t)]] - {\rm i}[\hat{H}, (\hat{L}\hat{\rho}(t) + \hat{\rho}(t)\hat{L}^\dagger)] \end{aligned} \quad (6.18)$$

が得られる．これを少し変形すると

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} =& -{\rm i}\left[\frac{\hat{L}^\dagger\hat{H} + \hat{H}\hat{L}}{2}, \hat{\rho}(t)\right] + (\hat{L} - {\rm i}\hat{H})\hat{\rho}(t)(\hat{L} - {\rm i}\hat{H})^\dagger \\ &- \frac{1}{2}\left\{(\hat{L} - {\rm i}\hat{H})^\dagger(\hat{L} - {\rm i}\hat{H}), \hat{\rho}(t)\right\} \end{aligned} \quad (6.19)$$

となり，リンドブラッド型の量子マスター方程式に帰着する．

なお，因果律を考慮せずに素朴に (6.13) で $\tau = 0$ としても，物理的に妥当な方程式にならない．実際，(6.13) で $\tau = 0$ とおいた式のアンサンブル平均をとると，時間発展方程式が $\hat{\rho}(t)$ に関して線形ではなく，量子系の時間発展の基本原理を満たさない．また，フィードバック項 (6.9) において，ストラトノビッチ積ではなく伊藤積を用いると，(6.17) の $\mathcal{K}^2[\hat{\rho}(t)]/2$ の項がない方程式が得られる．その結果として，量子マスター方程式がリンドブラッド方程式でなくなり，完全正値性を満たさなくなる．一方，(6.9) をストラトノビッチ積で定義して因果律も考慮した (6.16) は，そこから得られる量子マスター方程式 (6.19) が物理的に妥当な（すなわち，線形かつ完全正値な）リンドブラッド型になる．

具体例として，フィードバックによる直交位相振幅のスクイジングを考える．$[\hat{x},\hat{p}]=\mathrm{i}/2$ を満たす直交位相振幅のうち，$\hat{x}$ を QND 測定し，測定結果に応じて $\hat{x}$ を平行移動させることで，$\hat{x}$ のゆらぎを圧搾する．QND 測定のリンドブラッド演算子を $\hat{L}=\sqrt{\gamma/2}\hat{x}$ とする．また，フィードバックに用いる制御ハミルトニアンは，$\hat{x}$ の平行移動に対応する $\hat{H}=-k\hat{p}$ で与えられるとする（k は正の定数）．これは図 6.2 で模式的に表した状況に対応している．

このとき，(6.18) は

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt}=-\frac{\gamma}{2}[\hat{x},[\hat{x},\hat{\rho}]]-\frac{k^2}{2}[\hat{p},[\hat{p},\hat{\rho}]]+\mathrm{i}k\sqrt{\frac{\gamma}{2}}[\hat{p},(\hat{x}\hat{\rho}(t)+\hat{\rho}(t)\hat{x})] \tag{6.20}$$

となる．これに対して $\hat{x}$ の期待値と分散を計算すると

$$\frac{d\langle\hat{x}\rangle}{dt}=-k\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\langle\hat{x}\rangle,\quad \frac{d\langle\hat{x}^2\rangle}{dt}=\frac{k^2}{4}-k\sqrt{2\gamma}\langle\hat{x}^2\rangle. \tag{6.21}$$

したがって

$$\frac{d}{dt}(\langle\hat{x}^2\rangle-\langle\hat{x}\rangle^2)=\frac{k^2}{4}-k\sqrt{2\gamma}(\langle\hat{x}^2\rangle-\langle\hat{x}\rangle^2) \tag{6.22}$$

となる．すなわち，$\hat{x}$ の期待値はゼロ，分散は $k/4\sqrt{2\gamma}$ に収束することが分かる．したがって，初期状態の分散が $k/4\sqrt{2\gamma}$ より大きければ，$\hat{x}$ のスクイジングが実現できる．分散がゼロに収束しないのは，フィードバックの反作用による．なお，$\hat{p}$ については

$$\frac{d\langle\hat{p}\rangle}{dt}=0,\quad \frac{d\langle\hat{p}^2\rangle}{dt}=\frac{\gamma}{4} \tag{6.23}$$

が成り立つ．すなわち，$\hat{p}$ の分散は測定の反作用で時間とともに大きくなる．これは，測定によって $\hat{x}$ の分散が圧搾されるため，その代償として $\hat{p}$ の分散が大きくなることを意味している．

6.3 量子最適制御

次に，B.3.1 節と B.3.2 節で議論した最適制御の理論を，量子系に拡張することを考えよう．量子系の場合は，量子連続測定で得た結果をリアルタイムでフィードバックすることで，**量子最適制御**（**quantum optimal control**）を実現することができる．ここでは簡単のために，5.3 節で議論した QND 測定のセットアップ (5.86)，(5.87) で考える．初期状態はガウス状態とし，(5.89)，(5.90)，(5.94)，(5.95)，(5.96) が成り立つとする．時刻 $t=0$ から $t=\tau$ までの最適制御を考えよう．

以下のようなハミルトニアンによって系を制御する状況を考える:

$$\hat{H}_u(t):=2u(t)\hat{p}. \tag{6.24}$$

$u(t)$ の時間依存性が制御プロトコルに対応し，これが測定結果に依存する場合がフィードバック制御である．このハミルトニアンに対応する項を (5.89) に加えると，条件付き期待値の時間発展は

$$d\langle\hat{x}\rangle_{\mathrm{c}}=2\sqrt{\gamma}V_{\mathrm{c}}^{xx}\cdot dv+u(t)dt \tag{6.25}$$

となる．(5.90)，(5.94)，(5.95)，(5.96) はそのままである．

最適制御のための評価汎関数を

$$J[u] = F\mathrm{tr}[\hat{x}^2\hat{\rho}(\tau)] + \int_0^\tau \left[M(t)\mathrm{tr}[\hat{x}^2\hat{\rho}] + N(t)u(t)^2\right] dt \tag{6.26}$$

とする．なお，ここで $\hat{\rho}(t) := E[\hat{\rho}_\mathrm{c}(t)]$ は条件なしの密度演算子を表す．(6.26) は古典系の場合の (B.122) の x を演算子に変えたものに他ならない．(6.26) を最適化することは，$\hat{x}$ の古典ゆらぎのみならず量子ゆらぎも最適に制御することを意味する．たとえば，どのような制御プロトコルが $\hat{x}$ のスクイジングに関して最適かを求めることができる．

ここで，条件付き期待値の性質として，一般的に次式が成り立つ:

$$\mathrm{tr}[\hat{x}^2\hat{\rho}] = E[\langle\hat{x}\rangle_\mathrm{c}^2] + E[V_\mathrm{c}^{xx}]. \tag{6.27}$$

これは B.2.1 節で議論している古典ベイズ推定の場合の (B.93) の量子版であり，証明も形式的にはまったく同様にできる（古典系の場合の x を演算子に置き換えるだけである）．したがって，$\langle\hat{x}(t)\rangle_\mathrm{c} := \mathrm{tr}[\hat{x}\hat{\rho}_\mathrm{c}]$ とすると，評価汎関数を

$$\begin{aligned} J[u] =& E\left[F\langle\hat{x}(\tau)\rangle_\mathrm{c}^2 + \int_0^\tau [M(t)\langle\hat{x}(t)\rangle_\mathrm{c}^2 + N(t)u(t)^2]dt \right. \\ & \left. + FV_\mathrm{c}^{xx}(\tau) + \int_0^\tau M(t)V_\mathrm{c}^{xx}(t)dt\right] \end{aligned} \tag{6.28}$$

と書くことができる．ここで $V_\mathrm{c}^{xx}(t)$ の時間発展は 5.3 節の (5.94) で与えられ，制御入力 $u(t)$ には依存しない．したがって，$J[u]$ を最小化することと

$$J'[u] := E\left[F\langle\hat{x}(\tau)\rangle_\mathrm{c}^2 + \int_0^\tau [M(t)\langle\hat{x}(t)\rangle_\mathrm{c}^2 + N(t)u(t)^2]dt\right] \tag{6.29}$$

を最小化することは等価であることが分かる．ここで，$J[u]$ の $\hat{x}(t)$ を $\langle\hat{x}(t)\rangle_\mathrm{c}$ で置き換えたものが $J'[u]$ である．したがって B.3.1 節および B.3.2 節での議論と同様に，最適制御のプロトコルは

$$u^*(t) = -\frac{\Pi(t)}{N(t)}\langle\hat{x}(t)\rangle_\mathrm{c} \tag{6.30}$$

で与えられることが分かる．ただし $\Pi(t)$ は B.3.1 節で議論した**リカッチ方程式** (B.131) の解であり，ここに再掲すると

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} + 2a(t)\Pi(t) + M(t) - \frac{\Pi(t)^2}{N(t)} = 0, \quad \Pi(\tau) = F \tag{6.31}$$

の解である．これは測定結果とは独立に解くことができる．これは，古典制御において推定とフィードバックを独立に設計できることを保証する「分離定理」に相当する性質である．すなわち，初期状態と測定結果から計算される推定値 $\langle x(t)\rangle_\mathrm{c}$ を使い，古典系の場合と同様のプロトコルでフィードバック制御を行えばよいことが分かる．量子系の場合は古典系の x に対応する「隠れた変数」は実在しないが，測定で得られる情報 $\langle\hat{x}\rangle_\mathrm{c}$ だけに基づいて，古典系と全く同じ方法で最適制御を構成できるのだ．

第 7 章

量子確率過程

本章では，B.1 節で議論した確率過程の考え方を量子系に拡張して，非可換な演算子の確率過程について議論する．これは**量子確率過程**（**quantum stochastic process**）と呼ばれる．とくに，伊藤公式の非可換版である**量子伊藤公式**について議論する．これを使うと，第 5 章で議論した確率マスター方程式をミクロなハミルトニアンに基づいて導出することができる．

まず 7.1 節で準備として，連続自由度の電磁場について述べ，量子伊藤公式を導入する．7.2 節で量子確率過程を本格的に導入し，それを利用して 7.3 節で確率マスター方程式のミクロな導出を行う．7.4 節では入力–出力フォーマリズムという考え方を紹介し，7.5 節では確率解析の量子版についてさらに詳しく述べる．なお，7.2 節と 7.3 節で相互作用表示で，7.4 節と 7.5 節ではハイゼンベルク表示で議論する．

7.1 連続自由度の電磁場

まず準備として，無限に広がった自由空間内にある光子の性質を考えよう．

7.1.1 量子伊藤公式

無限に広がった自由空間内にある電磁場を考える．簡単のため空間次元は一次元（z 軸方向）として，単一の偏光モードだけを考える（多モードへの一般化は容易である）．波数 k の消滅演算子を $\hat{b}(k)$ とすると，その交換関係は

$$[\hat{b}(k), \hat{b}^\dagger(k')] = \delta(k - k') \tag{7.1}$$

で与えられる．また，ハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\mathrm{B}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hbar\omega_k \hat{b}^\dagger(k)\hat{b}(k) \tag{7.2}$$

である（付録 A.1.1 も参照）．

ここで，波数と位置のフーリエ変換によって，次のような消滅演算子を導入する:

$$\hat{b}(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{\mathrm{i}kz} \hat{b}(k). \tag{7.3}$$

$\hat{b}(z)$ の交換関係は，(7.1) を用いて計算すると，

$$[\hat{b}(z), \hat{b}^{\dagger}(z')] = \delta(z - z') \tag{7.4}$$

で与えられることが分かる．7.1.2 節で詳しく議論するように，生成演算子 $\hat{b}^{\dagger}(z)$ を真空状態 $|0\rangle$ に作用させた状態 $b^{\dagger}(z)|0\rangle$ は，（規格化因子を除いて）位置 z にデルタ関数的に「局在」した光子の状態とみなすことができる．また，関数 $f(z')$ で表される広がりをもった光子の状態は，規格化因子を除いて

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz' f(z')\hat{b}^{\dagger}(z')|0\rangle \tag{7.5}$$

と定義できる．$b^{\dagger}(z)|0\rangle$ は $f(z') = \delta(z - z')$ の場合に相当する．

ただし，光子は厳密な意味では局在できないことが知られている．一方本章では，光子の非局在性が重要になる時間・空間スケールよりも大きなスケールだけを議論する．「局在光子」はそのような状況で意味をもつ，近似的な概念である*1)．

次に，空間表示の生成消滅演算子を扱う便利な計算法として，量子伊藤公式を導入する．基準位置 z_0 から位置 z の間 $(z_0 < z)$ の電磁場に対応する消滅演算子は

$$\hat{B}(z) := \int_{z_0}^{z} \hat{b}(z')dz' \tag{7.6}$$

と書くことができる．その無限小差分

$$d\hat{B}(z) := \hat{b}(z)dz \tag{7.7}$$

は，位置 z から $z + dz$ までの電磁場に対応するとみなすことができる．$\hat{B}(z)$ $(z > z_0)$ と $\hat{B}^{\dagger}(z)$ $(z' > z_0)$ の交換関係を計算すると，

$$\begin{aligned}
[\hat{B}(z), \hat{B}^{\dagger}(z')] &= \int_{z_0}^{z} dx \int_{z_0}^{z'} dx' [\hat{b}(x), \hat{b}^{\dagger}(x')] \\
&= \int_{z_0}^{z} dx \int_{z_0}^{z'} dx' \delta(x - x') \\
&= \int_{z_0}^{\infty} dx \int_{z_0}^{\infty} dx' \Theta(z - x)\Theta(z' - x')\delta(x - x') \\
&= \int_{z_0}^{\infty} dx \Theta(z - x)\Theta(z' - x) \\
&= \min(z, z') - z_0
\end{aligned} \tag{7.8}$$

*1） 光子が局在できない理由は以下のように理解できる．たとえ $b^{\dagger}(z)|0\rangle$ のように生成演算子を位置 z だけに作用させた状態を考えても，その状態での物理量（電場やエネルギーなど）は z に局在できず，その周辺に広がった値をもつ（なお，電磁場のエネルギー密度そのものは，局所的に定義できる）．たとえばエネルギー密度の期待値は，z のまわりに距離の -7 乗に比例して分布する[13]．また，光子検出器は電場と電子の結合を利用して光子を検出するため，電場が局在していないことが光子が検出される位置の分布に影響する．このような意味で，厳密には，$b^{\dagger}(z)|0\rangle$ を位置 z に光子が局在した状態とみなすことはできない．しかし，本章で議論する時間・空間スケールは，このような非局在効果が見えるよりも長いスケールである．そのため，近似的に「局在光子」の概念を使っても矛盾が生じない．なお，$b^{\dagger}(z)|0\rangle$ という状態自体は，光子の局在可能性に関係なく well-defined であることに注意しよう．

となる．ここで $\Theta(z) := 0\ (z < 0),\ 1/2\ (z = 0),\ 1\ (z > 0)$ は階段関数，$\min(z, z')$ は z と z' の小さい方を表す（$z = z'$ の場合は $\min(z, z') = z$ である）．同様に，$z < z_0$，$z' < z_0$ のときは

$$[\hat{B}(z), \hat{B}^\dagger(z')] = -\max(z, z') + z_0 \tag{7.9}$$

となる．$\max(z, z')$ は z と z' の大きい方を表す．

$z > z_0$，$\Delta z > 0$ とすると，

$$[\hat{B}(z+\Delta z) - \hat{B}(z), \hat{B}^\dagger(z+\Delta z) - \hat{B}^\dagger(z)] = (z + \Delta z) - z - z + z = \Delta z. \tag{7.10}$$

$z + \Delta z > z_0$，$\Delta z < 0$ のときは，同様にして

$$[\hat{B}(z+\Delta z) - \hat{B}(z), \hat{B}^\dagger(z+\Delta z) - \hat{B}^\dagger(z)] = -\Delta z \tag{7.11}$$

となる．さらに $z < z_0$ の場合なども同様に考えると，結局

$$[\hat{B}(z+\Delta z) - \hat{B}(z), \hat{B}^\dagger(z+\Delta z) - \hat{B}^\dagger(z)] = |\Delta z| \tag{7.12}$$

が成り立つことが分かる．$\Delta z \to 0$ なる極限をとると

$$[d\hat{B}(z), d\hat{B}^\dagger(z)] = |dz| \tag{7.13}$$

を得る．また，$z \neq z'$ のときは

$$[d\hat{B}(z), d\hat{B}^\dagger(z')] = 0 \tag{7.14}$$

となる．なお，(7.13) と (7.14) は，デルタ関数の原点における値を $\delta(0) = |dz|^{-1}$ とする形式的な計算でも導くことができる:

$$\begin{aligned} [d\hat{B}(z), d\hat{B}^\dagger(z')] &= [\hat{b}(z)dz, \hat{b}^\dagger(z')dz'] \\ &= \delta(z - z')dz^2 \\ &= \begin{cases} |dz| & (z = z'), \\ 0 & (z \neq z'). \end{cases} \end{aligned} \tag{7.15}$$

以下本節では，簡単のために $dz > 0$ とする．

ここで，電磁場が真空の場合について，演算子の期待値を考えよう．任意の k に対して $\hat{b}(k)|0\rangle = 0$ となる状態 $|0\rangle$ が真空である．$d\hat{B}(z)|0\rangle = 0$ なので，

$$\langle 0|d\hat{B}(z)|0\rangle = \langle 0|d\hat{B}^\dagger(z)|0\rangle = 0, \tag{7.16}$$

$$\langle 0|d\hat{B}(z)^2|0\rangle = \langle 0|d\hat{B}^\dagger(z)^2|0\rangle = 0. \tag{7.17}$$

また，交換関係 (7.13) より

$$\langle 0|d\hat{B}^\dagger(z)d\hat{B}(z)|0\rangle = 0,\ \langle 0|d\hat{B}(z)d\hat{B}^\dagger(z)|0\rangle = dz \tag{7.18}$$

となる．式 (7.17) と (7.18) において $|0\rangle$ での期待値を明示するのを省略すると，

$$d\hat{B}(z)^2 = d\hat{B}^\dagger(z)^2 = d\hat{B}^\dagger(z)d\hat{B}(z) = 0,\ d\hat{B}(z)d\hat{B}^\dagger(z) = dz \tag{7.19}$$

という計算規則を得る．これは古典確率過程における伊藤公式に類似している．実際，7.2.2 節で詳しく見るように，この変数 z を時刻 t に変換したものが，量子伊藤公式である．ここでは，(7.19) も**量子伊藤公式**と呼ぶことにする．また，$d\hat{B}(z) = O(\sqrt{dz})$ というオーダーであると考えることができる．なお，$z \neq z'$ のときは，交換関係 (7.14) より

$$d\hat{B}(z)d\hat{B}(z') = d\hat{B}^\dagger(z)d\hat{B}^\dagger(z') = d\hat{B}^\dagger(z)d\hat{B}(z') = d\hat{B}(z)d\hat{B}^\dagger(z') = 0 \tag{7.20}$$

となる．ただし (7.19) と (7.20) は，最後に真空で期待値をとるという条件のもとでのみ成立するということに注意が必要である．

次に，電磁場の状態が真空とは限らない場合を考える．密度演算子 $\hat{\rho}_{\mathrm{B}}$ が

$$\mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{B}}\hat{b}(k)] = \mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{B}}\hat{b}^\dagger(k)] = 0 \tag{7.21}$$

を任意の k に対して満たすと仮定する．このとき，

$$\mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{B}}d\hat{B}(z)] = \mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{B}}d\hat{B}^\dagger(z)] = 0 \tag{7.22}$$

が成り立つ．さらに，$\hat{\rho}_{\mathrm{B}}$ が

$$\mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{B}}\hat{b}^\dagger(k)\hat{b}(k')] = N\delta(k-k') \tag{7.23}$$

を満たすと仮定する．ここで N は k によらない定数である．このとき，

$$\mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{B}}\hat{b}^\dagger(z)\hat{b}(z')] = N\delta(z-z') \tag{7.24}$$

が成立する．また，交換関係 (7.4) を使うと，

$$\mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{B}}\hat{b}(z)\hat{b}^\dagger(z')] = (N+1)\delta(z-z') \tag{7.25}$$

が得られる．したがって，真空のときと同様の計算により

$$\mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{B}}d\hat{B}^\dagger(z)d\hat{B}(z)] = Ndz,\ \mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{B}}d\hat{B}(z)d\hat{B}^\dagger(z)] = (N+1)dz \tag{7.26}$$

が示せる．あるいは，$\hat{\rho}_{\mathrm{B}}$ で期待値をとるという条件のもとで簡略に

$$d\hat{B}^\dagger(z)d\hat{B}(z) = Ndz,\ d\hat{B}(z)d\hat{B}^\dagger = (N+1)dz \tag{7.27}$$

とも書ける．また，

$$\mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{B}}\hat{b}(k)\hat{b}(k')] = \mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{B}}\hat{b}^\dagger(k)\hat{b}^\dagger(k')] = 0 \tag{7.28}$$

が成り立つと仮定すると，

$$\mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{B}}d\hat{B}(z)^2] = \mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{B}}d\hat{B}^\dagger(z)^2] = 0 \tag{7.29}$$

を示せる．これも簡略に

$$d\hat{B}(z)^2 = d\hat{B}^\dagger(z)^2 = 0 \tag{7.30}$$

と書ける．式 (7.27) と (7.30) も，量子伊藤公式とみなすことができる．この場合も，$d\hat{B}(z) = O(\sqrt{dz})$ と考えることができる．なお，真空は $N=0$ の場合に相当する．

ただし，このような量子伊藤公式が使えるのは，状態に関する仮定 (7.23) と (7.28) が

満たされているときに限ることに注意が必要である．たとえば，$\hat{\rho}_\mathrm{B}$ が逆温度 β の熱平衡状態のときは，仮定 (7.28) は満たされるが (7.23) は満たされない．実際，

$$\mathrm{tr}[\hat{\rho}\hat{b}^\dagger(k)\hat{b}(k')] = N(\omega_k)\delta(k-k'), \tag{7.31}$$

ここで $N(\omega_k) := (\exp(\beta\hbar\omega_k)-1)^{-1}$ となり，(7.23) の N が $\omega_k := c|k|$ に依存してしまう．ただし，電磁場とシステムが相互作用しているとき，システムの周波数 ω_0 の付近で $N(\omega)$ が一定と近似できるならば，$N := N(\omega_0)$ として近似的に仮定 (7.23) が満たされていると考えることもできる．

最後に，以上で議論した（真空とは限らない）状態 $\hat{\rho}_\mathrm{B}$ をスクイズした状態を考えよう．4.4.3 節の (4.100) と (4.101) で定義したスクイジング演算子 $\hat{S}$ を考える（パラメータ $\xi := re^{\mathrm{i}\theta}$ は波数 k に依存しないとする）．$\hat{S}$ はユニタリ演算子であることに注意しよう．スクイズド状態 $\hat{S}\hat{\rho}_\mathrm{B}\hat{S}^\dagger$ における $d\hat{B}(z)$，$d\hat{B}^\dagger(z)$ の演算規則を考えることは，もとの状態 $\hat{\rho}_\mathrm{B}$ において

$$d\hat{B}'(z) := \hat{S}d\hat{B}(z)\hat{S}^\dagger,\quad d\hat{B}'^\dagger(z) := \hat{S}d\hat{B}^\dagger(z)\hat{S}^\dagger \tag{7.32}$$

の演算規則を考えることと等価である．スクイジングによる生成消滅演算子の変換公式 (4.102) を用いると，(7.32) は

$$\begin{aligned} d\hat{B}'(z) &= (\cosh r)d\hat{B}(z) - e^{\mathrm{i}\theta}(\sinh r)d\hat{B}^\dagger(z), \\ d\hat{B}'^\dagger(z) &= (\cosh r)d\hat{B}^\dagger(z) - e^{-\mathrm{i}\theta}(\sinh r)d\hat{B}(z) \end{aligned} \tag{7.33}$$

と書ける．したがって，(7.27) と (7.30) を用いて

$$\begin{aligned} d\hat{B}'(z)^2 &= -e^{\mathrm{i}\theta}(\cosh r)(\sinh r)(2N+1)dz, \\ d\hat{B}'^\dagger(z)^2 &= -e^{-\mathrm{i}\theta}(\cosh r)(\sinh r)(2N+1)dz, \\ d\hat{B}'^\dagger(z)d\hat{B}'(z) &= \left((\cosh r)^2 N + (\sinh r)^2(N+1)\right)dz, \\ d\hat{B}'(z)d\hat{B}'^\dagger(z) &= \left((\sinh r)^2 N + (\cosh r)^2(N+1)\right)dz \end{aligned} \tag{7.34}$$

が得られる．ここで $M := -e^{\mathrm{i}\theta}(\cosh r)(\sinh r)(2N+1)$，$N' := (\cosh r)^2 N + (\sinh r)^2(N+1)$ とおくと，(7.34) は

$$\begin{aligned} d\hat{B}'(z)^2 &= M dz,\ d\hat{B}'^\dagger(z)^2 = M^* dz, \\ d\hat{B}'^\dagger(z)d\hat{B}'(z) &= N'dz,\ d\hat{B}'(z)d\hat{B}'^\dagger(z) = (N'+1)dz \end{aligned} \tag{7.35}$$

となる．これがスクイズド状態に対する量子伊藤公式である．ここで $N'(N'+1) = (\cosh r)^2(\sinh r)^2(2N+1)^2 + N(N+1)$，$|M|^2 = (\cosh r)^2(\sinh r)^2(2N+1)^2$ が成り立つので，M と N' は

$$N'(N'+1) \geq |M|^2 \tag{7.36}$$

という関係を満たす．なお，もとの状態 $\hat{\rho}_\mathrm{B}$ が真空の場合は $N = 0$ なので，等式 $N'(N'+1) = |M|^2$ が成立する．

7.1.2 光子の状態

さて，以上の計算規則を用いて，空間的に局在した一光子状態について考えよう*2)．$|0\rangle$

*2) 先に述べたように，「局在光子」の概念は，長い時間・空間スケールに注目したときに正当化できる

を真空として，次のような状態ベクトルを定義する:

$$|1, z\rangle := \frac{d\hat{B}^\dagger(z)}{\sqrt{dz}}|0\rangle. \tag{7.37}$$

量子伊藤公式より，これは規格化されていることが分かる:

$$\langle 1, z|1, z\rangle = \frac{\langle 0|d\hat{B}(z)d\hat{B}^\dagger(z)|0\rangle}{dz} = 1. \tag{7.38}$$

これは，位置 z から $z + dz$ の間に局在した光子の状態に他ならない．

また，光子数演算子を以下のように定義する:

$$d\hat{\Lambda}(z) := \frac{d\hat{B}^\dagger(z)d\hat{B}(z)}{dz}. \tag{7.39}$$

この演算子の期待値を $|0\rangle$ と $|1, z\rangle$ に対して計算すると，

$$\langle 0|d\hat{\Lambda}(z)|0\rangle = 0, \tag{7.40}$$

$$\begin{aligned}\langle 1, z|d\hat{\Lambda}(z)|1, z\rangle &:= \langle 0|\frac{d\hat{B}(z)d\hat{B}^\dagger(z)d\hat{B}(z)d\hat{B}^\dagger(z)}{dz^2}|0\rangle \\ &= \langle 0|\frac{[d\hat{B}^\dagger(z)d\hat{B}(z) + dz][d\hat{B}^\dagger(z)d\hat{B}(z) + dz]}{dz^2}|0\rangle \\ &= 1\end{aligned} \tag{7.41}$$

となる．また，$z \neq z'$ のときは，

$$\begin{aligned}\langle 1, z'|d\hat{\Lambda}(z)|1, z'\rangle &:= \langle 0|\frac{d\hat{B}(z')d\hat{B}^\dagger(z)d\hat{B}(z)d\hat{B}^\dagger(z')}{dzdz'}|0\rangle \\ &= \langle 0|\frac{d\hat{B}(z')d\hat{B}^\dagger(z')d\hat{B}^\dagger(z)d\hat{B}(z)}{dzdz'}|0\rangle \\ &= 0\end{aligned} \tag{7.42}$$

となる．すなわち $d\hat{\Lambda}(z)$ は，位置 z から $z + dz$ の間にある光子数を計測する演算子である*3)．

次に，空間的に局在したコヒーレント状態を考える．位置 z から $z + dz$ の間に局在したコヒーレント状態は，

$$\exp(\beta d\hat{B}^\dagger(z) - \beta^* d\hat{B}(z))|0\rangle = (\hat{I} + \beta d\hat{B}^\dagger(z))|0\rangle + o(\sqrt{dz}) \tag{7.43}$$

を規格化したものである．$\beta \in \mathbb{C}$ はコヒーレント状態の振幅を表す．ここで

$$\langle 0|\exp(-\beta d\hat{B}^\dagger(z) + \beta^* d\hat{B}(z))\exp(\beta d\hat{B}^\dagger(z) - \beta^* d\hat{B}(z))|0\rangle = 1 + |\beta|^2 dz + o(dz) \tag{7.44}$$

なので，規格化されたコヒーレント状態 $|\beta, z\rangle$ を

$$|\beta, z\rangle := \left(1 - \frac{|\beta|^2}{2}dz\right)(\hat{I} + \beta d\hat{B}^\dagger(z))|0\rangle \tag{7.45}$$

近似的な概念である．7.1.1 節の脚注 1 を参照．

*3) 厳密な数学の観点からは，特異性をもつ $d\hat{B}^\dagger(z)d\hat{B}(z)$ を dz で割る (7.39) のような演算は正当化できない．一方，物理学ではこのような演算をしばしば行うが，実際上の問題は生じない．厳密な定式化については [59] などを参照．

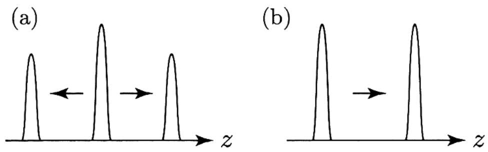


図 7.1　(a) 一点に局在した光子は，左右に分かれて進む．(b) 負のエネルギーを追加する近似により，一方向だけに進む光子を定式化できる．

と定義する．このとき，

$$\langle \beta, z | \beta, z \rangle = 1 + o(dz), \tag{7.46}$$

$$\langle \beta, z | d\hat{B}(z) | \beta, z \rangle = \beta dz + o(dz), \tag{7.47}$$

$$\langle \beta, z | d\hat{\Lambda}(z) | \beta, z \rangle = |\beta|^2 dz + o(dz) \tag{7.48}$$

が成立する．

7.1.3　一方向に進む光子

さて，ハミルトニアン (7.2) について，$\hat{b}(z)$ を時刻 t_0 を基準としてハイゼンベルク表示すると，

$$\hat{b}(z,t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{b}(k) e^{\mathrm{i}(kz - \omega_k (t - t_0))} \tag{7.49}$$

となる．ここで

$$kz - \omega_k (t - t_0) = k(z \mp c(t - t_0)) \tag{7.50}$$

と書ける．ここで右辺の $\mp$ は，$k > 0$ のとき $-$，$k < 0$ のとき $+$ をとる．すなわち，ある位置 z にある単一光子は，左右に分かれて進むことになる（もともと $\hat{b}(z)$ には正負両方の波数のモードが含まれていた）．ここで，正の波数の成分だけを取り出して $\hat{b}'_{\rightarrow}(z) := (2\pi)^{-1/2} \int_0^{+\infty} dk e^{\mathrm{i}kz} \hat{b}(k)$ と定義しても，これを光子の消滅演算子とみなすことはできない．実際，$[\hat{b}'_{\rightarrow}(z), \hat{b}'^{\dagger}_{\rightarrow}(z')] \neq \delta(z - z')$ となり，粒子が満たすべき正準交換関係が成立しない．そこで，以下に見るように近似的な概念として，「一方向だけに進む光子」を導入する（図 7.1 を参照）．この概念は，本章のようなマルコフ近似の範囲内の議論において，重要な役割を果たす．

まず右向き（波数が $k > 0$）の光子を考えよう．ハミルトニアン (7.2) を以下のように変更する近似を行う:

$$\hat{H}_{\mathrm{B}\rightarrow} := \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hbar c k \hat{b}^{\dagger}(k) \hat{b}(k). \tag{7.51}$$

すなわち，負の波数 $k < 0$ のモードに，負のエネルギー $ck = -\omega_k$ を対応させる．なお，添え字 $\rightarrow$ は，右向きのモードを考えていることを明示するために付けた．厳密にはもちろん，負の（真空より小さな）エネルギーは物理的ではない．しかし，7.2.1 節で詳しく述べるように，正の波数 $k > 0$ の電磁場と相互作用するシステムの周波数 ω_0 が十分大きい場合には，負のエネルギー（負の波数）のモードは相互作用にはほとんど寄与しないので，このような近似は物理的に妥当な結果を与える．

ここで次のような時間発展演算子を定義する:

$$\hat{U}_{\mathrm{B}\rightarrow}(t,t_0) := \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_{\mathrm{B}\rightarrow}(t-t_0)\right). \tag{7.52}$$

ハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{B}\rightarrow}$ について，$\hat{b}(z)$ を時刻 t_0 を基準としてハイゼンベルク表示すると，

$$\begin{aligned}\hat{b}_{\rightarrow}(z,t) &:= \hat{U}^{\dagger}_{\mathrm{B}\rightarrow}(t,t_0)\hat{b}(z)\hat{U}_{\mathrm{B}\rightarrow}(t,t_0)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}dk\hat{b}(k)e^{\mathrm{i}(k(z-c(t-t_0)))}\end{aligned} \tag{7.53}$$

となり，右向きに進むモードだけが現れる．これは

$$\hat{b}_{\rightarrow}(z,t) = \hat{b}(z-c(t-t_0),t_0) \tag{7.54}$$

を満たす．すなわち，時刻 t に位置 z にある光子は，基準時刻 t_0 には位置 $z-c(t-t_0)$ にあったことになる．なおシュレーディンガー表示で考えると，

$$\begin{aligned}\hat{U}_{\mathrm{B}\rightarrow}(t,t_0)\hat{b}^{\dagger}(z_0)|0\rangle &= \hat{U}_{\mathrm{B}\rightarrow}(t,t_0)\hat{b}^{\dagger}(z_0)\hat{U}^{\dagger}_{\mathrm{B}\rightarrow}(t,t_0)\hat{U}_{\mathrm{B}\rightarrow}(t,t_0)|0\rangle\\ &= \hat{b}(z_0+c(t-t_0))|0\rangle\end{aligned} \tag{7.55}$$

となる．ここで $\hat{U}_{\mathrm{B}\rightarrow}(t,t_0)|0\rangle = |0\rangle$ を用いた．すなわち，時刻 t_0 に位置 z_0 に生成された光子が，時刻 $t>t_0$ には位置 $z=z_0+c(t-t_0)>z_0$ まで進んでいることが確かめられる．

このようにして，十分大きな周波数 ω_0 をもつシステムとの相互作用を考えるという条件のもとで，近似的に「空間的に一点に局在し，かつ右方向だけに進む単一光子」を考えることができる．

同様にして，左向き（波数が $k<0$）の光子を考えよう．この場合は，ハミルトニアン (7.2) を以下のように変更する近似を行う:

$$\hat{H}_{\mathrm{B}\leftarrow} := -\int_{-\infty}^{+\infty}dk\hbar ck\hat{b}^{\dagger}(k)\hat{b}(k) = -\hat{H}_{\mathrm{B}\rightarrow}. \tag{7.56}$$

すなわち，正の波数 $k>0$ のモードに，負のエネルギー $-ck=-\omega_k$ を対応させた．7.2.1 節で詳しく述べるように，負の波数 $k<0$ の電磁場と相互作用するシステムの周波数 ω_0 が十分大きい場合には，負のエネルギー（正の波数）のモードは相互作用にはほとんど寄与しないので，このような近似は物理的に妥当な結果を与える．また，次のような時間発展演算子を定義する:

$$\hat{U}_{\mathrm{B}\leftarrow}(t,t_0) := \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_{\mathrm{B}\leftarrow}(t-t_0)\right). \tag{7.57}$$

ハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{B}\leftarrow}$ について，$\hat{b}(z)$ を時刻 t_0 を基準としてハイゼンベルク表示すると，

$$\begin{aligned}\hat{b}_{\leftarrow}(z,t) &:= \hat{U}^{\dagger}_{\mathrm{B}\leftarrow}(t,t_0)\hat{b}(z)\hat{U}_{\mathrm{B}\leftarrow}(t,t_0)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}dk\hat{b}(k)e^{\mathrm{i}(k(z+c(t-t_0)))}\end{aligned} \tag{7.58}$$

となり，左向きに進むモードだけが現れる．これは

$$\hat{b}_{\leftarrow}(z,t) = \hat{b}(z+c(t-t_0),t_0) \tag{7.59}$$

を満たす．(7.55) と同様にシュレーディンガー表示で考えると，時刻 t_0 に位置 z_0 に生成された光子が，時刻 $t > t_0$ には位置 $z = z_0 - c(t - t_0) < z_0$ まで進んでいることが確かめられる．

7.1.4 伊藤積分とストラトノビッチ積分

さてここで，$d\hat{B}(z)$ と他の演算子の積について考えておこう．$\hat{A}(z)$ を位置に依存する適当な演算子として，

$$\int_{z_0}^{z} \hat{A}(z')d\hat{B}(z') \tag{7.60}$$

という積分を考えたい．ここで，古典確率過程（B.1 節を参照）のときと同様に，積分を z に関してどう離散化するかが問題になる．$\Delta z := (z - z_0)/n$，$z_l := z_0 + l\Delta z$ とすると，伊藤積分は

$$\int_{z_0}^{z} \hat{A}(z') \cdot d\hat{B}(z') := \lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \hat{A}(z_l)[\hat{B}(z_l + \Delta z) - \hat{B}(z_l)] \tag{7.61}$$

と定義され，一方のストラトノビッチ積分は

$$\int_{z_0}^{t} \hat{A}(z') \circ d\hat{B}(z') := \lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \hat{A}(z_l + \Delta z/2)[\hat{B}(z_l + \Delta z) - \hat{B}(z_l)] \tag{7.62}$$

と定義される．すなわち，積 $\hat{A}(z')d\hat{B}(z')$ の部分をどう離散化するかが問題になる．無限小増分で書くと，伊藤型の積は

$$\hat{A}(z) \cdot d\hat{B}(z) := \hat{A}(z)[\hat{B}(z + dz) - \hat{B}(z)] \tag{7.63}$$

と定義され，とストラトノビッチ型の積は

$$\hat{A}(z) \circ d\hat{B}(z) := \hat{A}(z + dz/2)[\hat{B}(z + dz) - \hat{B}(z)] \tag{7.64}$$

と定義される．$\hat{A}(z)$ が z について十分になめらかな関数ならば，両者の積分の定義は一致する．7.2 節と 7.3 節ではこのような状況を扱う．しかし，$\hat{A}(z)$ が特異性を含む場合や，$\hat{A}(z)$ が $\hat{B}(z)$ の関数であるような場合は，両者の積分が一致しないので注意が必要である．7.5 節でこのような状況を考え，ストラトノビッチ型から伊藤型への変換規則を議論する．

7.2 量子ウィーナー過程

次に，7.1 節で考えた連続自由度の電磁場と，システムの相互作用を考える．7.2 節と 7.3 節では相互作用表示で考える．

7.2.1 設定

一次元（z 軸方向）の電磁場中のシステムを考える．簡単のため電磁場の偏光自由度は無視する．システムは，右向きの波数 $k > 0$ のモードと左向きの波数 $k < 0$ のモードの両方と相互作用している．7.1 節と同様に，光速度を c，周波数を $\omega_k := c|k|$ とする．ハミ

ルトニアンは

$$\hat{H}_{\rm tot} = \hat{H}_{\rm S} + \hat{H}_{\rm int} + \hat{H}_{\rm B} \tag{7.65}$$

で与えられるとする．$\hat{H}_{\rm S}$ はシステムのハミルトニアンで，環境のハミルトニアンを

$$\hat{H}_{\rm B} := \int_{-\infty}^{+\infty} dk\hbar\omega_k \hat{b}^\dagger(k)\hat{b}(k) \tag{7.66}$$

とする．ここで $\omega_k := c|k|$ は周波数である．また，相互作用ハミルトニアンを，回転波近似で

$$\hat{H}_{\rm int} := {\rm i}\hbar\sqrt{c}\int_{-\infty}^{+\infty} dk[\kappa(\omega_k)\hat{L}^\dagger\hat{b}(k) - \kappa(\omega_k)^*\hat{L}\hat{b}^\dagger(k)], \tag{7.67}$$

とする．$\hat{L}$ はシステムの演算子で，交換関係

$$[\hat{H}_{\rm S}, \hat{L}] = -\hbar\omega_0\hat{L},\ [\hat{H}_{\rm S}, \hat{L}^\dagger] = \hbar\omega_0\hat{L}^\dagger \tag{7.68}$$

を満たすと仮定する．ここで $\omega_0 > 0$ はシステムを特徴づける周波数である．また $\kappa(\omega_k)$ は，周波数 ω_k のモードとシステムの相互作用の大きさを特徴づけている．たとえば**ローレンツ型の相互作用**の場合は

$$\kappa(\omega_k) := \frac{g\sqrt{\kappa/2\pi}}{(\omega_k - \omega_{\rm c}) - {\rm i}\kappa/2} \tag{7.69}$$

と書ける．ここで $g > 0$ と $\kappa > 0$ は定数で，$\omega_{\rm c} > 0$ は適当な周波数である*4)．また，**マルコフ型の相互作用**の場合は

$$\kappa(\omega_k) := \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} \tag{7.70}$$

と，$\kappa(\omega_k)$ が ω_k に依存しない形になる（$\kappa > 0$ は定数）．なお，ローレンツ型 (7.69) において g^2/κ を一定にして $\kappa \to \infty$，$g \to \infty$ の極限をとり，$4g^2/\kappa$ を改めて κ とおけば，マルコフ型 (7.70) に帰着する．

さて，異なるモードの電磁場は自由空間では相互作用しない．したがって，システムと右向き（$k > 0$）のモードとの相互作用と，左向き（$k < 0$）のモードとの相互作用は，独立に考えることができる．そこで以下では，主に右向き（$k > 0$）のモードとの相互作用を考える．

右向きの波数 $k > 0$ のモードとシステムの相互作用に関係する相互作用ハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\rm int} := {\rm i}\hbar\sqrt{c}\int_{0}^{+\infty} dk[\kappa(\omega_k)\hat{L}^\dagger\hat{b}(k) - \kappa(\omega_k)^*\hat{L}\hat{b}^\dagger(k)], \tag{7.71}$$

である．$\hat{H}_{\rm S} + \hat{H}_{\rm B}$ に関して時刻 t_0 を基準とした相互作用表示をすると，

$$\hat{H}^{\rm I}_{\rm int}(t) = {\rm i}\hbar\sqrt{c}\int_{0}^{+\infty} dk[\kappa(\omega_k)\hat{L}^\dagger\hat{b}(k)e^{-{\rm i}(\omega_k-\omega_0)(t-t_0)} - \kappa(\omega_k)^*\hat{L}b^\dagger(k)e^{{\rm i}(\omega_k-\omega_0)(t-t_0)}] \tag{7.72}$$

となる．ここで $e^{\pm{\rm i}(\omega_k-\omega_0)(t-t_0)}$ は，共鳴点 $\omega_k = \omega_0$ の付近以外では，急速に振動するので平均化してゼロになると考えることができる．相互作用の時間スケールを τ_0 とすると，およそ

*4) 詳しくは A.2.3 節を参照．

$$|\omega_k - \omega_0| < \tau_0^{-1} \tag{7.73}$$

を満たす k のモードのみが相互作用に寄与する．システムを特徴づける周波数 ω_0 が τ_0^{-1} より十分大きければ，相互作用に寄与するモードは

$$\left|1 - \frac{\omega_k}{\omega_0}\right| \ll 1 \tag{7.74}$$

を満たす範囲にある．すなわち，周波数 ω_k がゼロ付近のモードは，相互作用に寄与しない．このとき，計算の便宜上，負のエネルギーのモードを追加する近似を行う:

$$\begin{aligned}\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}\rightarrow}(t) := \mathrm{i}\hbar\sqrt{c}\int_0^{+\infty} dk[\kappa(\omega_k)\hat{L}^\dagger\hat{b}(k)e^{-\mathrm{i}(\omega_k-\omega_0)(t-t_0)} - \kappa(\omega_k)^*\hat{L}b^\dagger(k)e^{\mathrm{i}(\omega_k-\omega_0)(t-t_0)}]\\ + \mathrm{i}\hbar\sqrt{c}\int_{-\infty}^{0} dk[\kappa(\tilde{\omega}_k)\hat{L}^\dagger\hat{b}(k)e^{-\mathrm{i}(\tilde{\omega}_k-\omega_0)(t-t_0)} - \kappa(\tilde{\omega}_k)^*\hat{L}b^\dagger(k)e^{\mathrm{i}(\tilde{\omega}_k-\omega_0)(t-t_0)}].\end{aligned} \tag{7.75}$$

ここで，負の波数 $k < 0$ に対して，負の周波数 $\tilde{\omega}_k := ck = -\omega_k < 0$ を割り当てた．負の周波数は負のエネルギーを意味するので，これは 7.1.4 節で議論した負のエネルギーを追加する近似と同じである．いまの状況では，負の周波数に対応する $e^{\pm\mathrm{i}(\tilde{\omega}_k-\omega_0)(t-t_0)}$ は急速に振動し，相互作用にはほとんど寄与しないので，このような近似は物理的に妥当な結果を与える．なお，$\kappa(\tilde{\omega}_k)$ は，$\omega_k > 0$ で定義された $\kappa(\omega_k)$ の定義域を $\tilde{\omega}_k < 0$ まで自然に延長したものである．なお，負のエネルギーを追加する近似は，相互作用ハミルトニアン (7.67) が回転波近似の形になっていたことと整合的である．実際，$\hat{L}\hat{b}(k)$ や $\hat{L}^\dagger\hat{b}^\dagger(k)$ の項があると，これらは $e^{\pm\mathrm{i}(\tilde{\omega}_k+\omega_0)(t-t_0)}$ で振動するので，$-\omega_0$ と共鳴する負の周波数のモードが生じてしまい，これが非物理的な結果を与えてしまう．

ここで記号の簡略化のために，正負の周波数をあわせて $\omega := ck$ $(-\infty < \omega < +\infty)$ と書く（すなわち，$k \geq 0$ のとき $\omega = \omega_k$，$k < 0$ のとき $\omega = \tilde{\omega}_k$）．また，生成消滅演算子の引数を k から ω に取り換えて，

$$\hat{b}(\omega) := c^{-1/2}\hat{b}(k = \omega/c) \tag{7.76}$$

とおく．このとき，交換関係は

$$[\hat{b}(\omega), \hat{b}^\dagger(\omega')] = \delta(\omega - \omega') \tag{7.77}$$

となる．これらの記号を用いると，(7.75) の近似は，相互作用ハミルトニアンを

$$\hat{H}_{\mathrm{int}\rightarrow} := \mathrm{i}\hbar\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega[\kappa(\omega)\hat{L}^\dagger\hat{b}(\omega) - \kappa(\omega)^*\hat{L}b^\dagger(\omega)] \tag{7.78}$$

に変更して，環境のハミルトニアンを，7.1.4 節で右向きの光子を考えた際のものと同じ

$$\hat{H}_{\mathrm{B}\rightarrow} := \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\hbar\omega\hat{b}^\dagger(\omega)\hat{b}(\omega) \tag{7.79}$$

に変更したことに対応する．相互作用ハミルトニアンの相互作用表示は

$$\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}\rightarrow}(t) = \mathrm{i}\hbar\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega[\kappa(\omega)\hat{L}^{\mathrm{I}\dagger}(t)\hat{b}(\omega)e^{-\mathrm{i}\omega(t-t_0)} - \kappa(\omega)^*\hat{L}^{\mathrm{I}}(t)b^\dagger(\omega)e^{\mathrm{i}\omega(t-t_0)}], \tag{7.80}$$

と書ける．ただし，$\hat{L}^{\mathrm{I}}(t) := \hat{L}e^{-\mathrm{i}\omega_0(t-t_0)}$ とした．

ここで，量子ノイズの演算子を

$$\hat{b}_{\mathrm{N}\to}(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\kappa(\omega)\hat{b}(\omega)e^{-\mathrm{i}\omega(t-t_0)} \tag{7.81}$$

と定義する．このとき，(7.80) は

$$\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}\to}(t) = \mathrm{i}\hbar[\hat{L}^{\mathrm{I}\dagger}(t)\hat{b}_{\mathrm{N}}(t) - \hat{L}^{\mathrm{I}}(t)\hat{b}^{\dagger}_{\mathrm{N}}(t)] \tag{7.82}$$

となる．また，交換関係は

$$\begin{aligned}[\hat{b}_{\mathrm{N}\to}(t), \hat{b}^{\dagger}_{\mathrm{N}\to}(t')] &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega d\omega'\kappa(\omega)\kappa(\omega')^* e^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}\omega' t'}[\hat{b}(\omega), \hat{b}^{\dagger}(\omega')] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega|\kappa(\omega)|^2 e^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}\end{aligned} \tag{7.83}$$

となる．相互作用がローレンツ型 (7.69) のとき，留数積分などを使ってこの積分を計算すると

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\frac{g^2\kappa/2\pi}{(\omega-\omega_{\mathrm{c}})^2+(\kappa/2)^2}e^{-\mathrm{i}\omega(t-t')} = g^2 e^{(-\mathrm{i}\omega_c-\kappa/2)|t-t'|} \tag{7.84}$$

となる．すなわち，量子ノイズは指数的に減衰する時間相関をもつ．相互作用がマルコフ型 (7.70) のときは,

$$[\hat{b}_{\mathrm{N}\to}(t), \hat{b}^{\dagger}_{\mathrm{N}\to}(t')] = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\frac{\kappa}{2\pi}e^{-\mathrm{i}\omega(t-t')} = \kappa\delta(t-t') \tag{7.85}$$

となる．すなわち，マルコフ型なら量子ノイズは時間相関をもたない．

以下では相互作用がマルコフ型 (7.70) のときを考える．相互作用ハミルトニアン (7.78) は

$$\hat{H}_{\mathrm{int}\to} = \mathrm{i}\hbar\sqrt{\kappa c}[\hat{L}^{\dagger}\hat{b}(z=0) - \hat{L}\hat{b}^{\dagger}(z=0)] \tag{7.86}$$

と書け，$z=0$ だけで相互作用することが分かる．ここで，位置 z の消滅演算子 $\hat{b}(z)$ は，ω を使うと

$$\hat{b}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi c}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{\mathrm{i}\omega z/c}\hat{b}(\omega) \tag{7.87}$$

である．また，改めて

$$\hat{b}_{\to}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\hat{b}(\omega)e^{-\mathrm{i}\omega(t-t_0)} \tag{7.88}$$

という演算子を定義する．なお，$\hat{b}_{\mathrm{N}}(t) = \sqrt{\kappa}\hat{b}_{\to}(t)$ が成り立つ．交換関係は

$$[\hat{b}_{\to}(t), \hat{b}^{\dagger}_{\to}(t')] = \delta(t-t'). \tag{7.89}$$

となる．このとき式 (7.82) は

$$\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}\to}(t) = \mathrm{i}\hbar\sqrt{\kappa}[\hat{L}^{\mathrm{I}\dagger}(t)\hat{b}_{\to}(t) - \hat{L}^{\mathrm{I}}(t)\hat{b}^{\dagger}_{\to}(t)] \tag{7.90}$$

となる．

なお，$\hat{b}_{\to}(t)$ は，$\hat{b}(z=0)$ の $\hat{H}_{\mathrm{B}\to}$ についての時刻 t における相互作用表示である．

また，

$$\hat{b}_{\rightarrow}(t) = \hat{b}(z = -c(t - t_0)) \tag{7.91}$$

が成り立つ．すなわち，$\hat{b}_{\rightarrow}(t)$ は「空間的に局在し，かつ右向きに進む光子」に対応していることが分かる．(7.86) より，システムと環境は原点以外では相互作用しない．したがって，時刻 t_0 に位置 $z_0 := -c(t - t_0)$ にあった光子は，$\hat{H}_{\mathrm{B}\rightarrow}$ で時間発展して右方向に進み，時刻 t に $z = 0$ に到達してシステムと相互作用する．そのあと，再び $\hat{H}_{\mathrm{B}\rightarrow}$ で時間発展して右方向に進み，時刻 t_1 に位置 $z_1 := c(t_1 - t)$ に到達する．

以上はシステムと右向き（$k > 0$）のモードとの相互作用であったが，同様にして左向き（$k < 0$）のモードとの相互作用も考えることができる．詳細は省略するが，左向きのモードに対応した相互作用ハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{int}\leftarrow}$ や，量子ノイズの演算子 $\hat{b}_{\mathrm{N}\leftarrow}(t)$ を定義することができる．

なお，ここでの右向き・左向きのモードの電磁場は，必ずしもシステムへの入力・出力に対応していないことに注意しよう（すなわち，たとえば右方向に進む光子が左からシステムに入射し右に放出される場合を考えると，右向きの場が入力・出力の両方を記述している）．いわゆる入力–出力フォーマリズムは，7.4 節で議論する．

7.2.2 量子ウィーナー過程

さて，ウィーナー過程の量子版を考える*5)．まず右向きのモードの場合を考え，次の演算子を定義する:

$$\hat{B}_{\rightarrow}(t) := \int_{t_0}^{t} \hat{b}_{\rightarrow}(t')dt'. \tag{7.92}$$

これは**量子ウィーナー過程**と呼ばれ，その無限小増分

$$d\hat{B}_{\rightarrow}(t) := \hat{b}_{\rightarrow}(t)dt \tag{7.93}$$

は**量子ウィーナー増分**と呼ばれる．(7.91) より

$$\hat{b}_{\rightarrow}(t)dt = c^{-1/2}\hat{b}(z = -c(t - t_0))dz, \quad dz = cdt \tag{7.94}$$

が成り立つので，

$$d\hat{B}_{\rightarrow}(t) = c^{-1/2}d\hat{B}(z = -c(t - t_0)) \tag{7.95}$$

を得る．これにより，7.1.2 節で得た $d\hat{B}(z)$ に関する計算規則を $d\hat{B}_{\rightarrow}(t)$ にも適用できることが分かる．以下では $dt > 0$ とする．

まず交換関係について，

$$[d\hat{B}_{\rightarrow}(t), d\hat{B}^{\dagger}_{\rightarrow}(t)] = dt \tag{7.96}$$

および

$$[d\hat{B}_{\rightarrow}(t), d\hat{B}^{\dagger}_{\rightarrow}(t')] = 0 \ (t \neq t') \tag{7.97}$$

が成立する．また，環境の真空 $|0\rangle$ について期待値をとるという条件のもとでは，7.1.2 節で議論した $d\hat{B}(z)$ の場合と同様に，

---

*5) 古典版は B.1 節を参照.

$$d\hat{B}_{\rightarrow}(t)^2 = d\hat{B}^{\dagger}_{\rightarrow}(t)^2 = d\hat{B}^{\dagger}_{\rightarrow}(t)d\hat{B}_{\rightarrow}(t) = 0,\ d\hat{B}_{\rightarrow}(t)d\hat{B}^{\dagger}_{\rightarrow}(t) = dt \tag{7.98}$$

という計算規則が成立する．$t \neq t'$ のときは，

$$d\hat{B}_{\rightarrow}(t)d\hat{B}_{\rightarrow}(t') = d\hat{B}^{\dagger}_{\rightarrow}(t)d\hat{B}^{\dagger}_{\rightarrow}(t') = d\hat{B}^{\dagger}_{\rightarrow}(t)d\hat{B}_{\rightarrow}(t') = d\hat{B}_{\rightarrow}(t)d\hat{B}^{\dagger}_{\rightarrow}(t') = 0 \tag{7.99}$$

となる．これらは伊藤公式の量子版とみなすことができる．また，量子ウィーナー増分のオーダーは，$d\hat{B}_{\rightarrow}(t) = O(\sqrt{dt})$ と考えることができる．

環境の状態が真空とは限らない場合も同様である．状態 $\hat{\rho}_{\mathrm{B}}$ に関する仮定 (7.21), (7.23), (7.28) が満たされているならば，

$$\mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{B}} d\hat{B}_{\rightarrow}(t)] = \mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{B}} d\hat{B}^{\dagger}_{\rightarrow}(t)] = 0, \tag{7.100}$$

$$d\hat{B}^{\dagger}_{\rightarrow}(t)d\hat{B}_{\rightarrow}(t) = N dt,\ d\hat{B}_{\rightarrow}(t)d\hat{B}^{\dagger}_{\rightarrow} = (N+1)dt, \tag{7.101}$$

$$d\hat{B}_{\rightarrow}(t)^2 = d\hat{B}^{\dagger}_{\rightarrow}(t)^2 = 0 \tag{7.102}$$

が成り立つ．式 (7.101) と (7.102) も，量子伊藤公式とみなすことができる．この場合も，量子ウィーナー増分のオーダーは $d\hat{B}_{\rightarrow}(t) = O(\sqrt{dt})$ と考えることができる．

さて，7.1 節で議論した，空間的に局在した一光子状態について考えよう．$|0\rangle$ を真空して，

$$|1, t\rangle_{\rightarrow} := \frac{d\hat{B}^{\dagger}_{\rightarrow}(t)}{\sqrt{dt}}|0\rangle \tag{7.103}$$

と定義する．(7.37) で定義された $|1, z\rangle$ との関係は，(7.95) より，

$$|1, t\rangle_{\rightarrow} = |1, z = -c(t - t_0)\rangle \tag{7.104}$$

となる．また，$t_1 > t$，$z_1 := c(t_1 - t)$ として，

$$\hat{U}_{\mathrm{B}\rightarrow}(t_1, t_0) := \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_{\mathrm{B}\rightarrow}(t_1 - t_0)\right) \tag{7.105}$$

と定義すると，

$$|1, t\rangle_{\rightarrow} = \hat{U}^{\dagger}_{\mathrm{B}}(t_1, t_0)|1, z = z_1\rangle \tag{7.106}$$

を示すことができる．すなわち，$|1, t\rangle_{\rightarrow}$ は，時刻 t_1 における位置 z_1 の一光子状態の相互作用表示と等価である．

また，光子数演算子は

$$d\hat{\Lambda}_{\rightarrow}(t) := \frac{d\hat{B}^{\dagger}(t)d\hat{B}(t)}{dt} = d\hat{\Lambda}(z = -c(t - t_0)) \tag{7.107}$$

と定義することができる．コヒーレント状態 $|\beta, t\rangle_{\rightarrow}$ は

$$|\beta, t\rangle_{\rightarrow} := \left(1 - \frac{|\beta|^2}{2}dt\right)(\hat{I} + \beta d\hat{B}^{\dagger}_{\rightarrow}(t))|0\rangle = |\beta, z = -c(t - t_0)\rangle \tag{7.108}$$

と定義される．

量子ウィーナー増分 $d\hat{B}_{\rightarrow}(t)$ を用いると，相互作用ハミルトニアン (7.90) は

$$\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}\rightarrow}(t)dt = \mathrm{i}\hbar\sqrt{\kappa}[L^{\mathrm{I}\dagger}(t)d\hat{B}_{\rightarrow}(t) - \hat{L}^{\mathrm{I}}(t)d\hat{B}^{\dagger}_{\rightarrow}(t)] \tag{7.109}$$

と書ける．環境に関して真空で期待値をとる場合，量子伊藤公式を適用すると，

$$\left(\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}\to}(t)dt\right)^2 = \hbar^2\kappa L^{\mathrm{I}\dagger}(t)\hat{L}^{\mathrm{I}}(t)dt + o(dt) \tag{7.110}$$

となる．したがって，時刻 t から無限小時間 dt の間の時間発展を表すユニタリ演算子は，

$$\begin{aligned}\hat{U}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}\to}(t, t+dt) &:= \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}\to}(t)dt\right) \\ &= \hat{I} + \sqrt{\kappa}[L^{\mathrm{I}\dagger}(t)d\hat{B}_\to(t) - \hat{L}^{\mathrm{I}}(t)d\hat{B}^\dagger_\to(t)] - \frac{\kappa}{2}L^{\mathrm{I}\dagger}(t)\hat{L}^{\mathrm{I}}(t)dt + o(dt)\end{aligned} \tag{7.111}$$

である．環境に関して真空で期待値をとらない場合は，このような展開は正当化できないことに注意が必要である．

また，$d\hat{B}_\to(t)$ と他の演算子の積について，7.1.5 節での議論と同様にして，伊藤型とストラトノビッチ型を定義することができる．それらは，(7.63) や (7.64) で z を t に置き換えたものとして定義される．式 (7.109) や (7.111) においては，$\hat{L}^{\mathrm{I}}(t)$ などは相互作用表示の演算子であり，システムのハミルトニアンに従って時間発展しているだけである．したがって，$\hat{L}^{\mathrm{I}}(t)$ は t に関してなめらかな関数で，量子ウィーナー増分 $\hat{B}_\to(t)$ にも依存しない．それゆえ式 (7.109) や (7.111) における $L^{\dagger\mathrm{I}}(t)d\hat{B}_\to(t)$ などの積は，伊藤型と解釈してもストラトノビッチ型と解釈しても違いはない．たとえば，伊藤型の場合に成り立つ $\langle L^{\dagger\mathrm{I}}(t)d\hat{B}_\to(t)\rangle = L^{\dagger\mathrm{I}}(t)\langle d\hat{B}_\to(t)\rangle$ を用いることができる（ここで $\langle\cdots\rangle$ は環境の状態に関する期待値を表す）．

なお，右向きのモードの場合と同様にして，左向きのモードに対応する量子ウィーナー過程 $\hat{B}_\leftarrow(t)$ を考えることもできる．異なる方向の量子ウィーナー増分は可換になる．

7.3 確率マスター方程式のミクロな導出

本節では，量子伊藤公式を用いて，確率マスター方程式のミクロな導出を行う．すなわち，ミクロな相互作用のハミルトニアンから出発して，量子連続測定のクラウス演算子を計算する．本節では右向き $k > 0$ のモードとシステムの相互作用を考える．また，本節では前節の設定を引き継ぎ，相互作用表示で考える．その際，記号の簡略化のため，右向きのモードであることを示す添え字 $\to$ と，相互作用表示の添え字 $^{\mathrm{I}}$ と引数 t を省略する．本節では $\langle\phi|\hat{U}|\psi\rangle$ のような計算をする際は常に，ベクトルも演算子も相互作用表示されており，断りのない限り時刻 t を考えているものとする．

7.3.1 直接検出

システムは位置 $z = 0$ で真空の環境 $|0\rangle$ と相互作用する．時刻 t における相互作用のあと，システムから右向きに光子が放出されるか，何も起きないかのどちらかである．図 7.2 に示すように，光子が放出されたときは，位置 $z_1 > 0$ にある検出器で時刻 $t_1(> t)$ に光子を検出する（$z_1 = c(t_1 - t)$ とする）．検出には誤差がないとする．

規格化された一光子状態 $|1\rangle$ は式 (7.103) で与えられる（引数 t は省略する）．これは時刻 t_1 に検出器の位置位置 z_1 に光子がある状態の相互作用表示である．この光子はシス

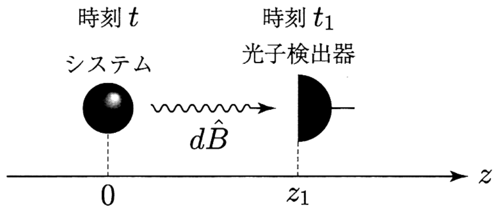


図 7.2　光子の直接検出の模式図．システムは時刻 t に環境と相互作用をする．その後システムは光子を放出するかしないかのどちらかである．放出する場合は，光子は時刻 t_1 に位置 z_1 にある検出器で検出される．

テムと時刻 t から $t+dt$ の間に相互作用する．その相互作用を表すユニタリ演算子は式 (7.111) で与えられる（以下ではこれを $\hat{U}(dt)$ と略記する）．このとき，クラウス演算子 $\hat{M}_1$ は

$$
\begin{aligned}
\hat{M}_1 &:= \langle 1|\hat{U}(dt)|0\rangle \\
&= \langle 0|\frac{d\hat{B}}{\sqrt{dt}}\left(\hat{I}+\sqrt{\kappa}\left[\hat{L}^\dagger d\hat{B}-\hat{L}d\hat{B}^\dagger\right]\right)|0\rangle + o(\sqrt{dt}) \\
&= -\sqrt{\frac{\kappa}{dt}}\hat{L}\langle 0|d\hat{B}d\hat{B}^\dagger|0\rangle + o(\sqrt{dt}) \\
&= -\sqrt{\kappa}\hat{L}\sqrt{dt} + o(\sqrt{dt})
\end{aligned}
\tag{7.112}
$$

となる．ここで，$\hat{L}$ は任意の演算子である（後に具体例について述べる）．真空の期待値の形に書くことで，量子伊藤公式の使用が正当化されていることに注意しよう．これは，リンドブラッド演算子が $-\sqrt{\kappa}\hat{L}$ であることを示している（-1 は全体にかかる位相なので無視すると，これは $\sqrt{\kappa}\hat{L}$ と等価である）．したがって，時刻 t におけるシステムの状態を $\hat{\rho}$ とすると，光子が検出される確率（これは時間 dt の間に検出される光子数の期待値に等しい）は

$$
\mathrm{tr}[\hat{\rho}\hat{M}_1^\dagger\hat{M}_1] = \sqrt{\kappa}\mathrm{tr}[\hat{\rho}\hat{L}^\dagger\hat{L}]dt \tag{7.113}
$$

である．

次に，光子が検出されない場合のクラウス演算子 $\hat{M}_0$ を求めると，

$$
\begin{aligned}
\hat{M}_0 &:= \langle 0|\hat{U}(dt)|0\rangle \\
&= \langle 0|\left(\hat{I}+\sqrt{\kappa}\left[\hat{L}^\dagger d\hat{B}-\hat{L}d\hat{B}^\dagger\right]-\frac{\kappa}{2}\hat{L}^\dagger\hat{L}dt\right)|0\rangle + o(dt) \\
&= \hat{I}_\mathrm{S} - \frac{\kappa}{2}\hat{L}^\dagger\hat{L}dt + o(dt)
\end{aligned}
\tag{7.114}
$$

となる．これは

$$
\sum_{k=0,1}\hat{M}_k^\dagger\hat{M}_k = \hat{I}_\mathrm{S} + o(dt) \tag{7.115}
$$

を満たす．また，

$$
\sum_{k=0,1}\hat{M}_k\hat{\rho}\hat{M}_k^\dagger = \hat{\rho} + \kappa\left[\hat{L}\hat{\rho}\hat{L}^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{L}^\dagger\hat{L},\hat{\rho}\}\right]dt, \tag{7.116}
$$

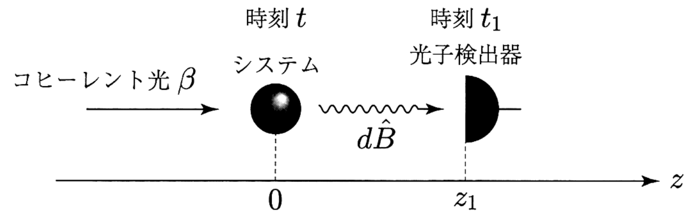


図 7.3　コヒーレント光の入力の模式図．(7.108) で与えられる右向きコヒーレント状態 $|\beta\rangle$ が時刻 $t=0$，位置 $z=0$ でシステムと相互作用し，そこから右向きに放出された光子が時刻 t_1，位置 $z=z_1$ で検出される．

したがって，測定に伴う密度演算子の時間発展は，

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \kappa\left[\hat{L}\hat{\rho}\hat{L}^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{L}^\dagger\hat{L}, \hat{\rho}\}\right] \tag{7.117}$$

となる．これはリンドブラッド型の量子マスター方程式に他ならない．

なお，システムが二準位原子で $\hat{L} = \hat{\sigma}_-$ の場合は，このモデルは原子の自然放出過程を記述する．その場合，κ は原子と電磁場の双極子相互作用の大きさを特徴づけている．また，システムがキャビティ内の単一モードの電磁場で $\hat{L} = \hat{a}$（$\hat{a}$ は消滅演算子）の場合は，このモデルはキャビティからのロスを表す．その場合，κ^{-1} はキャビティの Q 値を特徴づけている．

7.3.2　コヒーレント光の入力

次に，システムにコヒーレント光が入射されており，コヒーレント光と相互作用したシステムが放出した光子を検出する，という場合を考える（図 7.3 を参照）．すなわち，7.3.1 節と同じ設定で，環境の初期状態のみをコヒーレント状態に変更する．式 (7.108) で与えられる右向きのコヒーレント状態 $|\beta\rangle$ が，位置 $z=0$ で時刻 t にシステムと相互作用する．これは，位置 $z_0 < 0$ で時刻 $t_0(< t)$) に生成されたコヒーレント状態が左からシステムに入射したとみなせる．相互作用のあと，光子が検出された場合のクラウス演算子 $\hat{M}_1$ は

$$\begin{aligned}\hat{M}_1 &:= \langle 1|\hat{U}(dt)|\beta\rangle \\ &= \langle 0|\frac{d\hat{B}}{\sqrt{dt}}\left(\hat{I} + \sqrt{\kappa}(\hat{L}^\dagger d\hat{B} - \hat{L}d\hat{B}^\dagger)\right)(\hat{I} + \beta d\hat{B}^\dagger)\left(1 - \frac{|\beta|^2}{2}dt\right)|0\rangle + o(\sqrt{dt}) \\ &= \frac{\beta - \sqrt{\kappa}\hat{L}}{\sqrt{dt}}\langle 0|d\hat{B}d\hat{B}^\dagger|0\rangle + o(\sqrt{dt}) \\ &= (-\sqrt{\kappa}\hat{L} + \beta)\sqrt{dt} + o(\sqrt{dt})\end{aligned} \tag{7.118}$$

となる（ここで $\beta\hat{I}_\mathrm{S}$ を β と略記した）．これはリンドブラッド演算子が $-\sqrt{\kappa}\hat{L} + \beta$ であることを示している（全体の位相因子を除いて $\sqrt{\kappa}\hat{L} - \beta$ と等価）．したがって，時刻 t におけるシステムの状態を $\hat{\rho}$ とすると，光子が検出される確率（これは時間 dt の間に検出される光子数の期待値に等しい）は

$$\mathrm{tr}[\hat{\rho}\hat{M}_1^\dagger\hat{M}_1] = \mathrm{tr}[\hat{\rho}[\kappa\hat{L}^\dagger\hat{L} + \sqrt{\kappa}(\beta\hat{L} + \beta^*\hat{L}^\dagger)]]dt + |\beta|^2 dt \tag{7.119}$$

となる．

光子が検出されなかった場合のクラウス演算子は

$$\begin{aligned}\hat{M}_0 &:= \langle 0|\hat{U}(dt)|\beta\rangle \\ &= \langle 0| \left(\hat{I} + \sqrt{\kappa}(\hat{L}^\dagger d\hat{B} - \hat{L}d\hat{B}^\dagger) - \frac{\kappa}{2}\hat{L}^\dagger\hat{L}dt\right)(\hat{I} + \beta d\hat{B}^\dagger)\left(1 - \frac{|\beta|^2}{2}dt\right)|0\rangle + o(\sqrt{dt}) \\ &= \hat{I}_{\mathrm{S}} - \frac{\kappa}{2}\hat{L}^\dagger\hat{L}dt + \sqrt{\kappa}\beta\hat{L}^\dagger dt - \frac{|\beta|^2}{2}dt + o(dt) \qquad (7.120)\end{aligned}$$

となる．これは

$$\sum_{k=0,1}\hat{M}_k^\dagger\hat{M}_k = \hat{I}_{\mathrm{S}} + o(dt) \qquad (7.121)$$

を満たす．すなわち，たとえ強いコヒーレント光の入力があっても，dt を十分に小さくとれば，その間に光子が二個以上検出される確率は無視できることが確かめられる*6)．

また，

$$\sum_{k=0,1}\hat{M}_k\hat{\rho}\hat{M}_k^\dagger = \hat{\rho} + \kappa\left[\hat{L}\hat{\rho}\hat{L}^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{L}^\dagger\hat{L}, \hat{\rho}\}\right]dt + \sqrt{\kappa}[\beta\hat{L}^\dagger - \beta^*\hat{L}, \hat{\rho}]dt, \qquad (7.122)$$

したがって

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \kappa\left[\hat{L}\hat{\rho}\hat{L}^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{L}^\dagger\hat{L}, \hat{\rho}\}\right] - \mathrm{i}\sqrt{\kappa}[\mathrm{i}\beta\hat{L}^\dagger - \mathrm{i}\beta^*\hat{L}, \hat{\rho}] \qquad (7.123)$$

となる．右辺の最後の項は，コヒーレント光の入力によって，システムを駆動するユニタリ発展（ハミルトニアン $\sqrt{\kappa}(\mathrm{i}\beta\hat{L}^\dagger - \mathrm{i}\beta^*\hat{L})$ に対応）が生じていることを意味している．システムが二準位原子で $\hat{L} = \hat{\sigma}_-$ の場合は，これは（ブロッホ球の xy 平面の適当な方向を軸とした）回転に対応する．また，システムがキャビティ内の単一モードの電磁場で $\hat{L} = \hat{a}$（$\hat{a}$ は消滅演算子）とすると，この項はキャビティ内のコヒーレント状態の生成を記述する（B.1.2 節の (A.21) も参照）．このとき，振幅が $2\beta/\sqrt{\kappa}$ のコヒーレント状態 $\hat{\rho} = |2\beta/\sqrt{\kappa}\rangle\langle 2\beta/\sqrt{\kappa}|$ が (7.123) の右辺をゼロにする定常状態であることが確かめられる．

7.3.3 ホモダイン測定

次に，図 7.4 に示すようなホモダイン測定を考える．$+$ と $-$ でラベルされた二つの空間方向（たとえば z 軸と x 軸）があるとする．まず，システムが $+$ の波数が正のモードと相互作用し，光子を放出する（$+$ モードからのコヒーレント光の入力はないとする）．次に放出された光子と，$-$ モードの波数が正のコヒーレント状態を，ビームスプリッターで半分ずつ混合する．そのあとそれぞれのモードの光子を直接検出し，その差分を最終的な測定結果とする．

$+$ と $-$ のモードの波数が正の量子ウィーナー増分をそれぞれ $d\hat{B}_+$，$d\hat{B}_-$ とする．異なるモードなので，これらの増分は互いに可換である．システムと環境の相互作用ハミルトニアンは，相互作用表示で

*6) すなわち，$|\beta|dt \ll 1$ は満たしていないといけない．

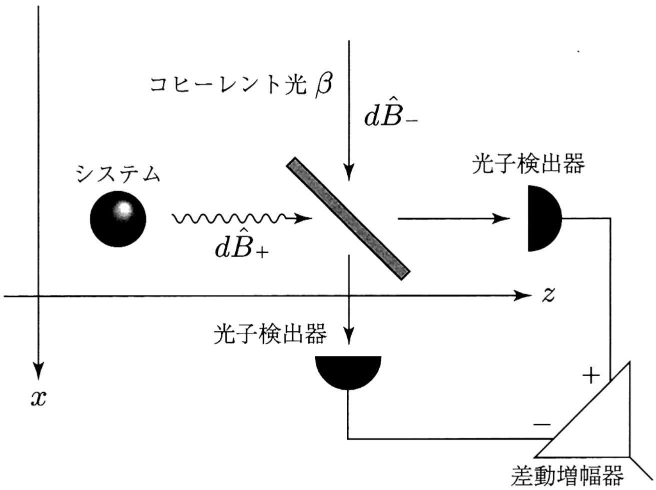


図 7.4　ホモダイン測定の模式図．+ と − でラベル付けされた二つの空間方向から，システム（+）とコヒーレント状態 $|\beta\rangle$ にあるローカルオシレーター（−）がビームスプリッターで混合され，二つの出力光が検出され，それらの差分が出力される．

$$\hat{H}_{\mathrm{int}}dt = \mathrm{i}\hbar\sqrt{\kappa}[L^\dagger d\hat{B}_+ - \hat{L}d\hat{B}_+^\dagger] \tag{7.124}$$

とする．時刻 t から無限小時間 dt の間のシステムと + モードの相互作用を表すユニタリ演算子は，

$$\hat{U}(dt) = \hat{I} + \sqrt{\kappa}[\hat{L}^\dagger d\hat{B}_+ - \hat{L}(t)d\hat{B}_+^\dagger] - \frac{\kappa}{2}\hat{L}^\dagger\hat{L}dt + o(dt) \tag{7.125}$$

である．− モードの初期状態は

$$|\beta\rangle = \left(1 - \frac{|\beta|^2}{2}dt\right)(\hat{I} + \beta d\hat{B}_-^\dagger)|0\rangle \tag{7.126}$$

である．また，ビームスプリッターのユニタリ発展を表す演算子を $\hat{U}_{\mathrm{BS}}$ とする．これは

$$\hat{U}_{\mathrm{BS}}^\dagger d\hat{B}_\pm \hat{U}_{\mathrm{BS}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(d\hat{B}_+ \mp \hat{B}_-) \tag{7.127}$$

を満たす（複号同順）．ここで，$\hat{U}_{\mathrm{BS}}|0\rangle|0\rangle = \hat{U}_{\mathrm{BS}}^\dagger|0\rangle|0\rangle = |0\rangle|0\rangle$ が成立する（ここで，$|0\rangle|0\rangle$ は，左から順に + モードと − モードの真空を表す）．結局，全体のユニタリ発展は $\hat{U}_{\mathrm{BS}}\hat{U}(dt)$ となる．

+ モードに光子が検出されたときのクラウス演算子 $\hat{M}_{1+}$ は，

$$\begin{aligned}
\hat{M}_{1+} &:= \langle 0|\langle 0|\frac{d\hat{B}_+}{\sqrt{dt}}\hat{U}_{\mathrm{BS}}\hat{U}(dt)|0\rangle|\beta\rangle \\
&= \langle 0|\langle 0|\hat{U}_{\mathrm{BS}}\hat{U}_{\mathrm{BS}}^\dagger\frac{d\hat{B}_+}{\sqrt{dt}}\hat{U}_{\mathrm{BS}}\hat{U}(dt)|0\rangle|\beta\rangle \\
&= \langle 0|\langle 0|\frac{d\hat{B}_+ - d\hat{B}_-}{2\sqrt{dt}}\left(\hat{I} + \sqrt{\kappa}(\hat{L}^\dagger d\hat{B}_+ - \hat{L}d\hat{B}_+^\dagger)\right)(\hat{I} + \beta d\hat{B}_-^\dagger)\left(1 - \frac{|\beta|^2}{2}dt\right)|0\rangle|0\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + o(\sqrt{dt}) \\
&= \frac{-\sqrt{\kappa}\hat{L}\langle 0|d\hat{B}_+ d\hat{B}_+^\dagger|0\rangle - \beta\langle 0|d\hat{B}_- d\hat{B}_-^\dagger|0\rangle}{\sqrt{2dt}} \\
&= -\frac{\sqrt{\kappa}\hat{L} + \beta}{\sqrt{2}}\sqrt{dt} + o(\sqrt{dt}).
\end{aligned} \tag{7.128}
$$

同様に，$-$ のモードに光子が検出された時のクラウス演算子は，

$$
\begin{aligned}
\hat{M}_{1-} &:= \langle 0|\langle 0|\frac{d\hat{B}_-}{\sqrt{dt}}\hat{U}_{\mathrm{SB}}\hat{U}(dt)|0\rangle|\beta\rangle \\
&= -\frac{\sqrt{\kappa}\hat{L} - \beta}{\sqrt{2}}\sqrt{dt} + o(\sqrt{dt})
\end{aligned} \tag{7.129}
$$

となる．これらは，リンドブラッド演算子 $-(\sqrt{\kappa}\hat{L} \pm \beta)/\sqrt{2}$（これは $(\sqrt{\kappa}\hat{L} \pm \beta)/\sqrt{2}$ と等価）に対応している．

ホモダイン測定の測定結果は，$+$ モードに検出された光子数と $-$ モードに検出された光子数の差である．この期待値は

$$
\mathrm{tr}[\hat{\rho}[\hat{M}_{1+}^\dagger \hat{M}_{1+} - \hat{M}_{1-}^\dagger \hat{M}_{1-}]] = \sqrt{\kappa}\mathrm{tr}[\hat{\rho}[\beta\hat{L}^\dagger + \beta^*\hat{L}]dt \tag{7.130}
$$

となる．

光子が検出されなかったときのクラウス演算子は，

$$
\begin{aligned}
\hat{M}_0 &:= \langle 0|\langle 0|\hat{U}_{\mathrm{BS}}\hat{U}(dt)|0\rangle|\beta\rangle \\
&= \langle 0|\langle 0|\left(\hat{I} + \sqrt{\kappa}(\hat{L}^\dagger d\hat{B}_+ - \hat{L}d\hat{B}_+^\dagger) - \frac{\kappa}{2}\hat{L}^\dagger\hat{L}dt\right)(\hat{I} + \beta d\hat{B}_-^\dagger)\left(1 - \frac{|\beta|^2}{2}dt\right)|0\rangle|0\rangle \\
&\quad + o(\sqrt{dt}) \\
&= \hat{I}_{\mathrm{S}} - \frac{\kappa}{2}\hat{L}^\dagger\hat{L}dt - \frac{|\beta|^2}{2}dt + o(dt)
\end{aligned} \tag{7.131}
$$

となる．これは

$$
\sum_{k=0,1\pm}\hat{M}_k^\dagger\hat{M}_k = \hat{I}_{\mathrm{S}} + o(dt) \tag{7.132}
$$

を満たす．また，

$$
\sum_{k=0,1\pm}\hat{M}_k\hat{\rho}\hat{M}_k^\dagger = \hat{\rho} + \kappa\left[\hat{L}\hat{\rho}\hat{L}^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{L}^\dagger\hat{L}, \hat{\rho}\}\right]dt, \tag{7.133}
$$

したがって

$$
\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \kappa\left[\hat{L}\hat{\rho}\hat{L}^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{L}^\dagger\hat{L}, \hat{\rho}\}\right] \tag{7.134}
$$

が得られる．これは直接光子検出の場合の (7.117) と同じである．実際，コヒーレント光はシステムと直接相互作用していない．

7.4 入力–出力フォーマリズム

ここまでは相互作用表示で考えていたが，同じ設定をハイゼンベルク表示で考えること

もできる．それに基づいて，**入力–出力フォーマリズム（input-output formalism）**を紹介する*7)．以下では右向きの波数 $k>0$ のモードとシステムの相互作用だけを考えて，右向きのモードに対して入力場（input field）と出力場（output field）を定義する．なお，左向きの波数 $k<0$ のモードの場合もまったく同様に入力場と出力場を定義できる．

7.4.1 入力場

全系のハミルトニアン (7.65) を考え，相互作用は負の周波数を取り入れた

$$\hat{H}_{\mathrm{int}\rightarrow} := \mathrm{i}\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega [\kappa(\omega)\hat{L}^\dagger \hat{b}(\omega) - \kappa(\omega)^* \hat{L}\hat{b}^\dagger(\omega)] \tag{7.135}$$

で与えられるとする．ここでシステムの演算子 $\hat{L}$ は交換関係 (7.68) を満たすと仮定する．環境のハミルトニアンを

$$\hat{H}_{\mathrm{B}\rightarrow} := \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \hbar\omega \hat{b}^\dagger(\omega)\hat{b}(\omega) \tag{7.136}$$

とする．

さて，時刻 t_0 を基準にしたハイゼンベルク表示を考えよう．以下で引数 t をもつ演算子は，断りのない限りハイゼンベルク表示のものとする．システムの任意の演算子 $\hat{A}$ の時間発展は，ハイゼンベルク方程式

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{A}(t)}{dt} &= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{A}(t), \hat{H}_{\mathrm{tot}}] \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{A}(t), \hat{H}_{\mathrm{S}}(t)] + \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left(\kappa(\omega)[\hat{A}(t), \hat{L}^\dagger(t)]\hat{b}(\omega,t) - \kappa(\omega)^* \hat{b}^\dagger(\omega,t)[\hat{A}(t), \hat{L}(t)]\right)\end{aligned} \tag{7.137}$$

に従う．ここで $\hat{A}(t_0) = \hat{A}$ である．また，消滅演算子のハイゼンベルク表示 $\hat{b}(\omega,t)$ は

$$\frac{d\hat{b}(\omega,t)}{dt} = -\mathrm{i}\omega\hat{b}(\omega,t) - \kappa(\omega)^*\hat{L}(t) \tag{7.138}$$

の解として与えられる．ここで $\hat{b}(\omega,t_0) = \hat{b}(\omega)$ である．これを形式的に解くと

$$\hat{b}(\omega,t) = e^{-\mathrm{i}\omega(t-t_0)}\hat{b}(\omega) - \kappa(\omega)^* \int_{t_0}^{t} e^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}\hat{L}(t')dt' \tag{7.139}$$

となる．(7.139) を (7.137) に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{A}(t)}{dt} =& -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{A}(t), \hat{H}_{\mathrm{S}}(t)] \\ &- [\hat{A}(t), \hat{L}^\dagger(t)] \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |\kappa(\omega)|^2 \int_{t_0}^{t} dt' e^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}\hat{L}(t') \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |\kappa(\omega)|^2 \int_{t_0}^{t} dt' e^{\mathrm{i}\omega(t-t')}\hat{L}^\dagger(t')[\hat{A}(t), \hat{L}(t)] \\ &+ [\hat{A}(t), \hat{L}^\dagger(t)] \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \kappa(\omega) e^{-\mathrm{i}\omega(t-t_0)}\hat{b}(\omega) \\ &- \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \kappa(\omega)^* e^{\mathrm{i}\omega(t-t_0)}\hat{b}^\dagger(\omega)[\hat{A}(t), \hat{L}(t)]\end{aligned} \tag{7.140}$$

*7)　これは [71] で提案された．

が得られる．ここで，7.2.1 節の (7.81) で導入したのと同じ量子ノイズの演算子

$$\hat{b}_{\mathrm{N}\to}(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \kappa(\omega) e^{-\mathrm{i}\omega(t-t_0)} \hat{b}(\omega) \tag{7.141}$$

を定義する．$\hat{b}_{\mathrm{N}\to}(t)$ は引数に t をとっているが，「$\hat{b}_{\mathrm{N}\to}$ という演算子のハイゼンベルク表示」ではないので注意が必要である．$\hat{b}_{\mathrm{N}\to}(t)$ は**入力場**と呼ばれる．また，

$$\eta(t-t') := \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |\kappa(\omega)|^2 e^{-\mathrm{i}\omega(t-t')} \tag{7.142}$$

と定義する．この積分は，相互作用がローレンツ型 (7.69) のときは式 (7.84)，マルコフ型 (7.70) のときは (7.85) で与えられる．7.2.1 節の (7.83) で示したように，

$$[\hat{b}_{\mathrm{N}\to}(t), \hat{b}^{\dagger}_{\mathrm{N}\to}(t')] = \eta(t-t') \tag{7.143}$$

が成立する．以上の記法を用いると，(7.139) は

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{A}(t)}{dt} =& -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{A}(t), \hat{H}_{\mathrm{S}}(t)] \\ & - [\hat{A}(t), \hat{L}^{\dagger}(t)] \int_{t_0}^{t} dt' \eta(t-t') \hat{L}(t') + \int_{t_0}^{t} dt' \eta(t-t')^* \hat{L}^{\dagger}(t') [\hat{A}(t), \hat{L}(t)] \\ & + [\hat{A}(t), \hat{L}^{\dagger}(t)] \hat{b}_{\mathrm{N}\to}(t) - \hat{b}^{\dagger}_{\mathrm{N}\to}(t) [\hat{A}(t), \hat{L}(t)] \end{aligned} \tag{7.144}$$

と書ける．これは**量子ランジュバン方程式**と呼ばれる．右辺第二項と第三項が緩和に，第四項と第五項が量子ノイズによる揺動に対応している．この意味で，(7.143) は第二種揺動散逸定理の一種であるとみなすことができる．なお，$\hat{A} = \hat{L}$ として，また $\hat{L}$ が交換関係 $[\hat{L}, \hat{L}^{\dagger}] = \hat{I}_{\mathrm{S}}$ を満たすと仮定すると，(7.144) は

$$\frac{d\hat{L}(t)}{dt} = -\mathrm{i}\omega_0 \hat{L}(t) - \int_{t_0}^{t} dt' \eta(t-t') \hat{L}(t') + \hat{b}_{\mathrm{N}\to}(t) \tag{7.145}$$

と簡単化される．

相互作用がマルコフ型 (7.70) で与えられる場合を考えよう．ここで

$$\hat{b}_{\mathrm{in}}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-\mathrm{i}\omega(t-t_0)} \hat{b}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \hat{b}_{\mathrm{N}\to}(t) \tag{7.146}$$

という演算子を導入する．$\hat{b}_{\mathrm{in}}(t)$ は入力場と呼ばれるものであり，7.2.1 節で導入した $\hat{b}_{\to}(t)$ と同じものである（入力–出力フォーマリズムの観点から添え字を変えただけである）:

$$\hat{b}_{\mathrm{in}}(t) = \hat{b}_{\to}(t) = \sqrt{c}\, \hat{b}(z = -c(t-t_0), t_0). \tag{7.147}$$

ここで，$\hat{b}_{\mathrm{in}}(t)$ は「$\hat{b}_{\mathrm{in}}$ という演算子のハイゼンベルク表示」ではないので注意が必要である．むしろ $\hat{b}_{\mathrm{in}}(t)$ は，ハイゼンベルク表示の基準時刻 t_0 において $z = -c(t-t_0) < 0$ に局在している光子に対応している，と考える方が分かりやすい．すなわち，$\hat{b}_{\mathrm{in}}(t)$ から構成される物理量（たとえば $\hat{b}^{\dagger}_{\mathrm{in}}(t)\hat{b}_{\mathrm{in}}(t)$）の期待値を計算すると，時刻 t_0 における位置 $z = -c(t-t_0) < 0$ の電磁場の状態を計算していることに対応する．なお，t_0 において

$z=-c(t-t_0)<0$ に光子があれば，それは右向きに進み，時刻 t に $z=0$ でシステムと相互作用する．

相互作用はマルコフ型を考えているので，

$$\eta(t-t')=\kappa\delta(t-t')=\kappa[\hat{b}_{\rm in}(t),\hat{b}_{\rm in}^\dagger(t)] \tag{7.148}$$

が成立する．したがって，$t>t_0$ のとき，(7.144) は

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{A}(t)}{dt}=&-\frac{\rm i}{\hbar}[\hat{A}(t),\hat{H}_{\rm S}(t)]\\&-\frac{\kappa}{2}[\hat{A}(t),\hat{L}^\dagger(t)]\hat{L}(t)+\frac{\kappa}{2}\hat{L}^\dagger(t)[\hat{A}(t),\hat{L}(t)]\\&+\sqrt{\kappa}[\hat{A}(t),\hat{L}^\dagger(t)]\hat{b}_{\rm in}(t)-\sqrt{\kappa}\hat{b}_{\rm in}^\dagger(t)[\hat{A}(t),\hat{L}(t)]\end{aligned} \tag{7.149}$$

となる．ここで，デルタ関数の積分

$$\int_{t_0}^{t}\delta(t-t')dt'=\frac{1}{2}\quad(t>t_0) \tag{7.150}$$

を使った．また，$\hat{A}=\hat{L}$ として，また $\hat{L}$ が交換関係 $[\hat{L},\hat{L}^\dagger]=\hat{I}_{\rm S}$ を満たすと仮定すると，(7.149) は

$$\frac{d\hat{L}(t)}{dt}=-{\rm i}\omega_0\hat{L}(t)-\frac{\kappa}{2}\hat{L}(t)+\sqrt{\kappa}\hat{b}_{\rm in}(t) \tag{7.151}$$

となる．

次に，入力場に対応する量子ウィーナー増分を考える:

$$d\hat{B}_{\rm in}(t):=\hat{b}_{\rm in}(t)dt. \tag{7.152}$$

$\hat{b}_{\rm in}(t)=\hat{b}_{\rightarrow}(t)$ だったので，$d\hat{B}_{\rm in}(t)$ は 7.2.2 節で導入した $d\hat{B}_{\rightarrow}(t)$ のと全く同じものである．また，入力場の光子数演算子を

$$d\hat{\Lambda}_{\rm in}(t):=\frac{d\hat{B}_{\rm in}^\dagger(t)d\hat{B}_{\rm in}(t)}{dt} \tag{7.153}$$

と定義する．これは (7.107) で定義した $d\hat{\Lambda}_{\rightarrow}(t)$ と全く同じものである．いま考えているハイゼンベルク表示においては，これは時刻 t_0 から t_0+dt の間に位置 $z=-c(t-t_0)<0$ を右向きに通過する光子数を意味する．

7.4.2 出力場

ある時刻 t_1 を $t_1>t>t_0$ を満たすようにとる．ハイゼンベルク方程式 (7.137) と (7.138) を次のようにして時刻 t_1 から解くことを考える．まず，

$$\hat{b}(\omega,t)=e^{-{\rm i}\omega(t-t_1)}\hat{b}(\omega,t_1)-\kappa(\omega)^*\int_{t_1}^{t}e^{-{\rm i}\omega(t-t')}\hat{L}(t')dt' \tag{7.154}$$

を (7.137) に代入して

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{A}(t)}{dt}=&-\frac{\rm i}{\hbar}[\hat{A}(t),\hat{H}_{\rm S}(t)]\\&-[\hat{A}(t),\hat{L}^\dagger(t)]\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega|\kappa(\omega)|^2\int_{t_1}^{t}dt'e^{-{\rm i}\omega(t-t')}\hat{L}(t')\end{aligned}$$

$$
+\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega|\kappa(\omega)|^2 \int_{t_1}^{t} dt' e^{\mathrm{i}\omega(t-t')}\hat{L}^\dagger(t')[\hat{A}(t),\hat{L}(t)] \tag{7.155}
$$
$$
+[\hat{A}(t),\hat{L}^\dagger(t)]\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\kappa(\omega)e^{-\mathrm{i}\omega(t-t_1)}\hat{b}(\omega,t_1)
$$
$$
-\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\kappa(\omega)^* e^{\mathrm{i}\omega(t-t_1)}\hat{b}^\dagger(\omega,t_1)[\hat{A}(t),\hat{L}(t)]
$$

を得る．ここで，$\hat{b}(\omega,t_1)$ は時刻 t_1 における（時刻 t_0 を基準にした）$\hat{b}(\omega)$ のハイゼンベルク表示であることに注意.

ここで簡単のために，相互作用がマルコフ型 (7.70) で与えられるとしよう．このとき，(7.155) は

$$
\begin{aligned}
\frac{d\hat{A}(t)}{dt} =& -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{A}(t),\hat{H}_{\mathrm{S}}(t)] \\
&+\frac{\kappa}{2}[\hat{A}(t),\hat{L}^\dagger(t)]\hat{L}(t)-\frac{\kappa}{2}\hat{L}^\dagger(t)[\hat{A}(t),\hat{L}(t)] \\
&+[\hat{A}(t),\hat{L}^\dagger(t)]\sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-\mathrm{i}\omega(t-t_1)}\hat{b}(\omega,t_1) \\
&-\sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{\mathrm{i}\omega(t-t_1)}\hat{b}^\dagger(\omega,t_1)[\hat{A}(t),\hat{L}(t)]
\end{aligned} \tag{7.156}
$$

となる．ここで，$t_1 > t$ のときにデルタ関数の積分が

$$
\int_{t_1}^{t}\delta(t-t')dt' = -\frac{1}{2} \quad (t_1 > t) \tag{7.157}
$$

となることを使った．さて，**出力場**の演算子を

$$
\hat{b}_{\mathrm{out}}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-\mathrm{i}\omega(t-t_1)}\hat{b}(\omega,t_1) \tag{7.158}
$$

と定義する．出力場の交換関係は

$$
[\hat{b}_{\mathrm{out}}(t),\hat{b}^\dagger_{\mathrm{out}}(t')] = \delta(t-t') \tag{7.159}
$$

となる．出力場を用いると，(7.156) は

$$
\begin{aligned}
\frac{d\hat{A}(t)}{dt} =& -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{A}(t),\hat{H}_{\mathrm{S}}(t)] \\
&+\frac{\kappa}{2}[\hat{A}(t),\hat{L}^\dagger(t)]\hat{L}(t)-\frac{\kappa}{2}\hat{L}^\dagger(t)[\hat{A}(t),\hat{L}(t)] \\
&+[\hat{A}(t),\hat{L}^\dagger(t)]\sqrt{\kappa}\hat{b}_{\mathrm{out}}(t)-\sqrt{\kappa}\hat{b}^\dagger_{\mathrm{out}}(t)[\hat{A}(t),\hat{L}(t)]
\end{aligned} \tag{7.160}
$$

となる．これは，入力場で記述したハイゼンベルク方程式 (7.149) と完全に等価である．とくに，$\hat{A}=\hat{L}$ として，また $\hat{L}$ が交換関係 $[\hat{L},\hat{L}^\dagger]=\hat{I}_{\mathrm{S}}$ を満たすと仮定すると，

$$
\frac{d\hat{L}(t)}{dt} = -\mathrm{i}\omega_0\hat{L}(t)+\frac{\kappa}{2}\hat{L}(t)+\sqrt{\kappa}\hat{b}_{\mathrm{out}}(t) \tag{7.161}
$$

が成り立つ．これも，入力場で記述した (7.151) と完全に等価である．右辺第二項の符号が (7.151) と違っているのは，$t_1 > t$ なる時刻を初期条件として解いたことに由来し，因果律を反映している．

出力場 $\hat{b}_{\mathrm{out}}(t)$ の物理的意味を考えよう．定義 (7.158) より，出力場は

$$\hat{b}_{\mathrm{out}}(t) = \hat{U}^\dagger(t_1,t_0)\sqrt{c}\hat{b}(z=c(t_1-t),t_0)\hat{U}(t_1,t_0) \tag{7.162}$$

と書ける．ここで

$$\hat{U}(t_1,t_0) := \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_{\mathrm{tot}}(t_1-t_0)\right) \tag{7.163}$$

とおいた．したがって，$\hat{b}_{\mathrm{out}}(t)$ は，$\hat{b}(z=c(t_1-t),t_0)$ の t_1 におけるハイゼンベルク表示，すなわち

$$\hat{b}_{\mathrm{out}}(t) = \sqrt{c}\hat{b}(z=c(t_1-t),t_1) \tag{7.164}$$

である．したがって，$\hat{b}_{\mathrm{out}}(t)$ から構成される物理量（たとえば $\hat{b}^\dagger_{\mathrm{out}}(t)\hat{b}_{\mathrm{out}}(t)$）の期待値を（ハイゼンベルク表示で，すなわち時刻 t_0 の状態ベクトルで）計算すると，これは時刻 t_1 における位置 $z=c(t_1-t)>0$ の電磁場の状態を計算していることに対応する．なお，t_1 において $z=(t_1-t)>0$ に光子があれば，それは時刻 t に $z=0$ でシステムと相互作用してから右向きに進んできたものである．

出力場 $\hat{b}_{\mathrm{out}}(t)$ についても，量子ウィーナー過程

$$\hat{B}_{\mathrm{out}}(t) := \int_{t_0}^{t}\hat{b}_{\mathrm{out}}(t')dt' \tag{7.165}$$

および量子ウィーナー増分

$$d\hat{B}_{\mathrm{out}}(t) := \hat{b}_{\mathrm{out}}(t)dt \tag{7.166}$$

を定義することができる．交換関係 (7.159) より，7.1.3 節および 7.2.2 節の議論と同様にして

$$[d\hat{B}_{\mathrm{out}}, d\hat{B}^\dagger_{\mathrm{out}}] = dt \tag{7.167}$$

を得る．

出力場のウィーナー増分に対する量子伊藤公式も考えることができる．ただし，$\hat{b}_{\mathrm{out}}(t)$ の定義に $\hat{b}(\omega,t_1)$ が使われていたことに注意．そのため，

$$(d\hat{B}_{\mathrm{out}})^2 = (d\hat{B}^\dagger_{\mathrm{out}})^2 = d\hat{B}^\dagger_{\mathrm{out}}d\hat{B}_{\mathrm{out}} = 0, \quad d\hat{B}_{\mathrm{out}}d\hat{B}^\dagger_{\mathrm{out}} = dt \tag{7.168}$$

が成立するのは，時刻 t_1 における環境の状態が真空の場合である．また，出力場の光子数演算子を，(7.107) と同様に

$$d\hat{\Lambda}_{\mathrm{out}}(t) := \frac{d\hat{B}^\dagger_{\mathrm{out}}(t)d\hat{B}_{\mathrm{out}}(t)}{dt} \tag{7.169}$$

と定義する．これは時刻 t_1 から dt の間に位置 $z=c(t_1-t)>0$ を右向きに通過する光子数に対応する．

なお，以上では右向きのモードに対して，入力と出力を考えた．しかし図 7.5 に示す片側型キャビティの場合のように，右向きのモードが入力で左向きのモードが出力，という場合がある．この場合は，キャビティのミラーが，正の波数を負の波数に変換して入射場を反射している（上記の定式化では，このような反射の効果は入っていなかった）．そのため，反射がある場合の左向きの出力場は，反射がない場合の右向きの出力場と等価である．すなわち，片側型キャビティの場合は，上記の $\hat{b}_{\mathrm{out}}(t)$ を左向きのモードだと考えて

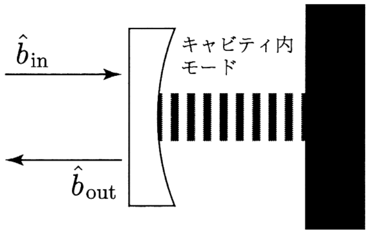


図 7.5　片側型キャビティの模式図．入力は右向きのモード，出力は左向きのモードである．キャビティのミラーにおける反射は，正の波数を負の波数に変換する役割を果たす．

計算することができる．これは，出力場に対してのみ座標を z から $-z$ に変換することと等価である．

7.4.3　入力–出力関係式

入力場で記述した方程式 (7.151) と出力場で記述した方程式 (7.161) は等価であったので，これらの式の右辺が等しいとおくことで

$$\hat{b}_{\text{out}}(t) - \hat{b}_{\text{in}}(t) = \sqrt{\kappa}\hat{L}(t) \tag{7.170}$$

が得られる．これは出力場を入力場に関係づける式，あるいは $\hat{L}(t)$ を入出力場で表す式とみなせる．(7.170) を量子ウィーナー増分で書くと

$$d\hat{B}_{\text{out}}(t) - d\hat{B}_{\text{in}}(t) = \sqrt{\kappa}\hat{L}(t)dt \tag{7.171}$$

となる．ここから

$$d\Lambda_{\text{out}}(t) = \kappa\hat{L}^\dagger(t)\hat{L}(t)dt + \sqrt{\kappa}(\hat{L}(t)d\hat{B}_{\text{in}}(t) + \hat{L}^\dagger(t)\hat{B}^\dagger_{\text{in}}(t)) + d\hat{\Lambda}_{\text{in}}(t) \tag{7.172}$$

を得る．(7.172) を使って，7.3 節で議論した量子連続測定の結果の期待値を計算してみよう．

直接検出

時刻 t_0 における全系の初期状態を $\hat{\rho}\otimes|0\rangle\langle 0|$ とする．ここで $\hat{\rho}$ はシステムの初期状態，$|0\rangle$ は位置 $z=-c(t-t_0)$ における真空である．この状態について (7.172) の両辺の期待値をとると

$$\langle d\Lambda_{\text{out}}(t)\rangle = \kappa\text{tr}[\hat{\rho}\hat{L}^\dagger(t)\hat{L}(t)]dt \tag{7.173}$$

となる．すなわち，出力場の値（すなわち，位置 $z=c(t_1-t)$ に置いた検出器で時刻 t_1 に検出される光子数の期待値）は，時刻 t におけるシステムの $\hat{L}^\dagger\hat{L}$ の期待値に比例する．これは 7.3.1 節で相互作用表示で求めた (7.113) と同じである．

コヒーレント光の入力

次に，時刻 t_0 における全系の初期状態を $\hat{\rho}\otimes|\beta\rangle\langle\beta|$ とする．ここで $\hat{\rho}$ はシステムの初

期状態，$|\beta\rangle$ は位置 $z=-c(t-t_0)$ におけるコヒーレント状態である．この状態について (7.172) の両辺の期待値をとると

$$\langle d\Lambda_{\rm out}(t)\rangle = {\rm tr}[\hat\rho[\kappa\hat L^\dagger(t)\hat L(t)+\sqrt{\kappa}(\beta\hat L(t)+\beta^*\hat L^\dagger(t))]]dt+|\beta|^2dt \tag{7.174}$$

となる．これは 7.3.2 節で求めた (7.119) と同じである．

ホモダイン測定

最後にホモダイン測定を考える．7.3.3 節で議論したように，+ モードと − モードがあるので，入出力がそれぞれ二つある場合を考える必要がある．まず，出力場がビームスプリッターを通る前の段階では

$$d\hat B_{+{\rm out}}(t)-d\hat B_{+{\rm in}}(t)=\sqrt{\kappa}\hat L(t)dt, \tag{7.175}$$

$$d\hat B_{-{\rm out}}(t)-d\hat B_{-{\rm in}}(t)=0 \tag{7.176}$$

であり，出力場がビームスプリッターを通ると

$$\frac{d\hat B_{+{\rm out}}(t)-d\hat B_{-{\rm out}}(t)}{\sqrt2}-d\hat B_{+{\rm in}}(t)=\sqrt{\kappa}\hat L(t)dt, \tag{7.177}$$

$$\frac{d\hat B_{+{\rm out}}(t)+d\hat B_{-{\rm out}}(t)}{\sqrt2}-d\hat B_{-{\rm in}}(t)=0 \tag{7.178}$$

となる．これを $d\hat B_{+{\rm out}}(t)$，$d\hat B_{-{\rm out}}(t)$ について解いて

$$d\hat B_{+{\rm out}}(t)=\frac{\sqrt{\kappa}\hat L(t)+d\hat B_{+{\rm in}}(t)+d\hat B_{-{\rm in}}(t)}{\sqrt2}, \tag{7.179}$$

$$d\hat B_{-{\rm out}}(t)=\frac{\sqrt{\kappa}\hat L(t)-d\hat B_{+{\rm in}}(t)+d\hat B_{-{\rm in}}(t)}{\sqrt2} \tag{7.180}$$

を得る．したがって

$$\begin{aligned}d\Lambda_{+{\rm in}}-d\Lambda_{-{\rm in}}=&\sqrt{\kappa}[\hat L^\dagger(t)d\hat B_{\rm in}(t)+\hat L(t)d\hat B^\dagger_{\rm in}(t)]dt\\&+d\hat B^\dagger_{-{\rm in}}(t)d\hat B_{+{\rm in}}(t)+d\hat B^\dagger_{+{\rm in}}(t)d\hat B_{-{\rm in}}(t)\end{aligned} \tag{7.181}$$

となる．さて，時刻 t_0 における全系の初期状態を $\hat\rho\otimes|0\rangle\langle0|\otimes\beta\rangle\langle\beta|$ とする．ここで $\hat\rho$ はシステムの初期状態，$|0\rangle$ は + モードの位置 $-c(t-t_0)$ における真空，$|\beta\rangle$ は − モードの位置 $-c(t-t_0)$ におけるコヒーレント状態である．この状態について (7.181) の両辺の期待値をとると，

$$\langle d\Lambda_{+{\rm in}}-d\Lambda_{-{\rm in}}\rangle=\sqrt{\kappa}{\rm tr}[\hat\rho[\beta\hat L^\dagger(t)+\beta^*\hat L(t)]]dt \tag{7.182}$$

となる．これは 7.3.3 節で求めた (7.130) と同じである．

7.5 量子確率微分方程式

さて，入力場 $\hat b_{\rm in}(t)$ で記述されたハイゼンベルク表示の量子ランジュバン方程式 (7.149) を，入力場の量子ウィーナー増分 (7.152) で書き換えよう．以下では，簡単のため $d\hat B_{\rm in}(t)$ を単に $d\hat B(t)$ と書くことにする．このとき，

$$
\begin{aligned}
d\hat{A}(t) = & -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{A}(t), \hat{H}_{\mathrm{S}}(t)]dt \\
& -\frac{\kappa}{2}[\hat{A}(t), \hat{L}^\dagger(t)]\hat{L}(t)dt + \frac{\kappa}{2}\hat{L}^\dagger(t)[\hat{A}(t), \hat{L}(t)]dt \\
& + \sqrt{\kappa}[\hat{A}(t), \hat{L}^\dagger(t)] \circ d\hat{B}(t) - \sqrt{\kappa}d\hat{B}^\dagger(t) \circ [\hat{A}(t), \hat{L}(t)] \\
= & -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{A}(t), \hat{H}_{\mathrm{S}}(t)]dt \\
& + \kappa\left[\hat{L}^\dagger(t)\hat{A}(t)\hat{L}(t) - \frac{1}{2}\{\hat{L}^\dagger(t)\hat{L}(t), \hat{A}(t)\}\right]dt \\
& + \sqrt{\kappa}[\hat{A}(t), \hat{L}^\dagger(t)] \circ d\hat{B}(t) - \sqrt{\kappa}d\hat{B}^\dagger(t) \circ [\hat{A}(t), \hat{L}(t)]
\end{aligned}
\tag{7.183}
$$

となる．ここで，以下に説明するように $\circ$ はストラトノビッチ型の積を表している．

ハイゼンベルク表示を考えているので，$\hat{A}(t)$ や $\hat{L}(t)$ は量子ウィーナー過程 $\hat{B}(t)$ に依存する．したがって，$\hat{A}(t)d\hat{B}(t)$ や $\hat{L}(t)d\hat{B}(t)$ などの積の解釈には注意を要する．式 (7.183) を導く過程でハイゼンベルク方程式を用いたが，そこで伊藤公式などを用いることはせず，通常の（確率過程ではない）微分方程式を解くときと同じように計算した．したがって，式 (7.183) における $[\hat{A}(t), \hat{L}^\dagger(t)] \circ d\hat{B}(t)$ や $d\hat{B}^\dagger(t) \circ [\hat{A}(t), \hat{L}(t)]$ などは，ストラトノビッチ型の積 (7.64) と解釈すべきものである．

そこで，式 (7.183) を伊藤型に変換してみよう．7.1.2 節で導入した量子伊藤公式 (7.101) と (7.102) が成り立つような環境の状態を仮定する．まず，式 (7.183) より

$$
\begin{aligned}
& \hat{A}(t) \circ d\hat{B}(t) := \hat{A}(t + dt/2) \cdot d\hat{B}(t) \\
& \quad = \left(\hat{A}(t) + \frac{\sqrt{\kappa}}{2}[\hat{A}(t), \hat{L}^\dagger(t)] \cdot d\hat{B}(t) - \frac{\sqrt{\kappa}}{2}d\hat{B}^\dagger(t) \cdot [\hat{A}(t), \hat{L}(t)] + o(\sqrt{dt})\right) \cdot d\hat{B}(t) \\
& \quad = \hat{A}(t) \cdot d\hat{B}(t) - \frac{\sqrt{\kappa}}{2}[\hat{A}(t), \hat{L}(t)]Ndt + o(dt).
\end{aligned}
\tag{7.184}
$$

式 (7.183) は任意のハイゼンベルク表示の任意の演算子に対して成立したので，$\hat{A}(t)$ を $[\hat{A}(t), \hat{L}^\dagger(t)]$ に置き換えると

$$
[\hat{A}(t), \hat{L}^\dagger(t)] \circ d\hat{B}(t) = [\hat{A}(t), \hat{L}^\dagger(t)] \cdot d\hat{B}(t) - \frac{\sqrt{\kappa}}{2}[[\hat{A}(t), \hat{L}^\dagger(t)], \hat{L}(t)]Ndt + o(dt)
\tag{7.185}
$$

となる．同様に

$$
\begin{aligned}
& d\hat{B}^\dagger(t) \circ \hat{A}(t) := d\hat{B}^\dagger(t) \cdot \hat{A}(t + dt/2) \\
& \quad = d\hat{B}^\dagger(t) \cdot \left(\hat{A}(t) + \frac{\sqrt{\kappa}}{2}[\hat{A}(t), \hat{L}^\dagger(t)] \cdot d\hat{B}(t) - \frac{\sqrt{\kappa}}{2}d\hat{B}^\dagger(t) \cdot [\hat{A}(t), \hat{L}(t)] + o(\sqrt{dt})\right) \\
& \quad = d\hat{B}^\dagger(t) \cdot \hat{A}(t) + \frac{\sqrt{\kappa}}{2}[\hat{A}(t), \hat{L}^\dagger(t)]Ndt + o(dt)
\end{aligned}
\tag{7.186}
$$

より，

$$
d\hat{B}^\dagger(t) \circ [\hat{A}(t), \hat{L}(t)] = d\hat{B}^\dagger(t) \cdot [\hat{A}(t), \hat{L}(t)] + \frac{\sqrt{\kappa}}{2}[[\hat{A}(t), \hat{L}(t)], \hat{L}^\dagger(t)]Ndt + o(dt)
\tag{7.187}
$$

を得る．(7.185) と (7.187) を使って (7.183) を伊藤型の確率微分方程式に変換すると，

$$
\begin{aligned}
d\hat{A}(t) = &-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{A}(t),\hat{H}_{\mathrm{S}}(t)]dt \\
&-\frac{\kappa}{2}[\hat{A}(t),\hat{L}^{\dagger}(t)]\hat{L}(t)dt+\frac{\kappa}{2}\hat{L}^{\dagger}(t)[\hat{A}(t),\hat{L}(t)]dt \\
&+\sqrt{\kappa}[\hat{A}(t),\hat{L}^{\dagger}(t)]\cdot d\hat{B}(t)-\sqrt{\kappa}d\hat{B}^{\dagger}(t)\cdot[\hat{A}(t),\hat{L}(t)] \\
&-\frac{\kappa}{2}[[\hat{A}(t),\hat{L}^{\dagger}(t)],\hat{L}(t)]Ndt-\frac{\kappa}{2}[\hat{A}(t),\hat{L}^{\dagger}(t)]Ndt,
\end{aligned}
\tag{7.188}
$$

すなわち

$$
\begin{aligned}
d\hat{A}(t) = &-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{A}(t),\hat{H}_{\mathrm{S}}(t)]dt \\
&+\kappa(N+1)\left[\hat{L}^{\dagger}(t)\hat{A}(t)\hat{L}(t)-\frac{1}{2}\{\hat{L}^{\dagger}(t)\hat{L}(t),\hat{A}(t)\}\right]dt \\
&+\kappa N\left[\hat{L}(t)\hat{A}(t)\hat{L}^{\dagger}(t)-\frac{1}{2}\{\hat{L}(t)\hat{L}^{\dagger}(t),\hat{A}(t)\}\right]dt \\
&+\sqrt{\kappa}[\hat{A}(t),\hat{L}^{\dagger}(t)]\cdot d\hat{B}(t)-\sqrt{\kappa}d\hat{B}^{\dagger}(t)\cdot[\hat{A}(t),\hat{L}(t)]
\end{aligned}
\tag{7.189}
$$

となる．これが伊藤型の**量子確率微分方程式**である．なお，環境について真空で期待値をとる場合（$N=0$ の場合）は，伊藤型とストラトノビッチ型は同じ形になる．

量子確率微分方程式 (7.189) で時間発展するハイゼンベルク表示の演算子 $\hat{A}(t)$ を，密度演算子で期待値をとることを考えよう．そうすることで，シュレーディンガー表示のリンドブラッド型マスター方程式が導けることを以下に示す．全系の初期状態を $\hat{\rho}_{\mathrm{tot}}:=\hat{\rho}\otimes\hat{\rho}_{\mathrm{B}}$ として，$\hat{\rho}_{\mathrm{B}}$ は量子伊藤公式の仮定 (7.21)，(7.23)，(7.28) を満たしているとする．伊藤型の積の場合は

$$
\mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{B}}[\hat{A}(t),\hat{L}^{\dagger}(t)]\cdot d\hat{B}(t)]=\mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{B}}d\hat{B}^{\dagger}(t)\cdot[\hat{A}(t),\hat{L}(t)]]=0 \tag{7.190}
$$

が成り立つ．付録 B.1.6 で議論した古典確率過程のときと同様に，ストラトノビッチ積の場合はこのような計算は正当化できないことに注意しよう．以上より，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{tot}}d\hat{A}(t)] = &-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{tot}}[\hat{A}(t),\hat{H}_{\mathrm{S}}(t)]]dt \\
&+\kappa(N+1)\mathrm{tr}\left[\hat{\rho}_{\mathrm{tot}}\left[\hat{L}^{\dagger}(t)\hat{A}(t)\hat{L}(t)-\frac{1}{2}\{\hat{L}^{\dagger}(t)\hat{L}(t),\hat{A}(t)\}\right]\right]dt \\
&+\kappa N\mathrm{tr}\left[\hat{\rho}_{\mathrm{tot}}\left[\hat{L}(t)\hat{A}(t)\hat{L}^{\dagger}(t)-\frac{1}{2}\{\hat{L}(t)\hat{L}^{\dagger}(t),\hat{A}(t)\}\right]\right]dt
\end{aligned}
\tag{7.191}
$$

を得る．ここでシュレーディンガー表示の密度演算子を

$$
\hat{\rho}_{\mathrm{tot}}(t):=\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_{\mathrm{tot}}(t-t_0)\right)\hat{\rho}_{\mathrm{tot}}\exp\left(+\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_{\mathrm{tot}}(t-t_0)\right) \tag{7.192}
$$

と定義すると，(7.191) は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}[d\hat{\rho}_{\mathrm{tot}}(t)\hat{A}] = &-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathrm{tr}[[\hat{H}_{\mathrm{S}},\hat{\rho}_{\mathrm{tot}}(t)]\hat{A}]dt \\
&+\kappa(N+1)\mathrm{tr}\left[\left[\hat{L}\hat{\rho}_{\mathrm{tot}}(t)\hat{L}^{\dagger}-\frac{1}{2}\{\hat{L}^{\dagger}\hat{L},\hat{\rho}_{\mathrm{tot}}(t)\}\right]\hat{A}\right]dt \\
&+\kappa N\mathrm{tr}\left[\left[\hat{L}^{\dagger}\hat{\rho}_{\mathrm{tot}}(t)\hat{L}-\frac{1}{2}\{\hat{L}\hat{L}^{\dagger},\hat{\rho}_{\mathrm{tot}}(t)\}\right]\hat{A}\right]dt
\end{aligned}
\tag{7.193}
$$

と書き直すことができる．ここで $\hat{H}_{\mathrm{S}}$ と $\hat{L}$ はいずれもシステムの演算子で，$\hat{A}$ はシステムの任意の演算子だったことに注意すると，システムの密度演算子のシュレーディンガー表示

$$\hat{\rho}(t) := \mathrm{tr}_{\mathrm{B}}[\hat{\rho}_{\mathrm{tot}}(t)] \tag{7.194}$$

の時間発展方程式が次のように書けることが分かる：

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = &-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H}_{\mathrm{S}}, \hat{\rho}(t)] + \kappa(N+1)\left[\hat{L}\hat{\rho}(t)\hat{L}^{\dagger} - \frac{1}{2}\{\hat{L}^{\dagger}\hat{L}, \hat{\rho}(t)\}\right] \\ &+ \kappa N\left[\hat{L}^{\dagger}\hat{\rho}(t)\hat{L} - \frac{1}{2}\{\hat{L}\hat{L}^{\dagger}, \hat{\rho}(t)\}\right].\end{aligned} \tag{7.195}$$

これはリンドブラッド型の量子マスター方程式に他ならない．このように，量子確率微分方程式からも，量子マスター方程式を導くことができる．

第 8 章
非マルコフ過程

環境の物理量の時間相関が無視できない場合は，量子開放系のダイナミクスは非マルコフ的になる．このような場合は，第 4 章で議論した量子マスター方程式を適用することができない．本章では，非マルコフ性が重要な役割を果たす現象として，量子ゼノ効果（8.1 節）とダイナミカル・デカップリング（8.2 節）について詳しく議論する．いずれの場合も，非マルコフ的な時間発展を解析的に解くことができ，その性質を詳しく調べることができる．

8.1 量子ゼノ効果

量子ゼノ効果（quantum Zeno effect）とは，量子系を連続測定すると測定の効果で状態変化が停止する，あるいは遅くなる現象である*1)．本節では，まず簡単なユニタリ発展の場合について議論し，次に非マルコフな非ユニタリ発展の場合について議論する．

8.1.1 ユニタリ過程の場合

まず最初に，量子ゼノ効果の典型例として，システムの状態ベクトルがシュレーディンガー表示で

$$|\psi(t)\rangle = \sin(\omega_0 t)|0\rangle + \cos(\omega_0 t)|1\rangle \tag{8.1}$$

とユニタリ発展する場合を考えよう．このとき，初期条件は $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$ である．

時刻 τ に基底 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ を射影測定する．測定結果が 1 である確率は $\cos^2(\omega_0\tau)$ で，測定直後の状態は $|1\rangle$ になる．このあと再びシステムはユニタリ発展し，時刻 2τ に同じ射影測定をする．このように測定を N 回繰り返して，常に測定結果 1 を得る確率は $p_N := \cos^{2N}(\omega_0\tau)$ である．$T := \tau N$ を一定として $N \to \infty$，$\tau \to 0$ の極限をとることを考える．$N \gg 1$ のときには $\omega_0\tau = \omega_0 T/N \ll 1$ であることに注意して

$$\cos(\omega_0\tau) = 1 - \frac{\omega_0^2}{2}\tau^2 + o(\tau^2) \tag{8.2}$$

と展開すると，

---
*1) 理論提案は [72]，実験は [73] などによる．

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} p_N &= \lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{\omega_0^2}{2}\left(\frac{T}{N}\right)^2\right)^{2N} \\
&= \lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{1}{2N}\frac{\omega_0^2 T^2}{N}\right)^{2N} \\
&= \lim_{N\to\infty}\exp\left(-\frac{\omega_0^2 T^2}{N}\right) \\
&= 1
\end{aligned}
\tag{8.3}
$$

となる．すなわち，測定間隔が短い極限で，システムの状態は $|1\rangle$ から変化しなくなる．これが量子ゼノ効果である．この現象の本質は，(8.2) の右辺の展開において 1 の次の項が τ のオーダーではなく τ^2 のオーダーであること，したがって

$$
\left.\frac{d}{dt}\cos(\omega_0 t)\right|_{t=0} = 0 \tag{8.4}
$$

となっていることである．

8.1.2 自然放出のダイナミクス

ゼノ効果を非ユニタリ過程で考えるための準備として，本節では自然放出のダイナミクスを非マルコフ過程で議論しておく．ロスのあるキャビティ中の二準位原子をシステム，キャビティ内外の一次元の電磁場を環境とする．7.1 節で議論したように負の周波数を追加すると，ハミルトニアンは

$$
\hat{H}_{\mathrm{tot}} = \hat{H}_{\mathrm{S}} + \hat{H}_{\mathrm{int}} + \hat{H}_{\mathrm{B}} \tag{8.5}
$$

となる．ここで

$$
\hat{H}_{\mathrm{S}} := \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z, \tag{8.6}
$$

$$
\hat{H}_{\mathrm{int}} := \mathrm{i}\hbar\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega[\kappa(\omega)\hat{\sigma}_+\hat{b}(\omega) - \kappa(\omega)^*\hat{\sigma}_-\hat{b}^\dagger(\omega)], \tag{8.7}
$$

$$
\hat{H}_{\mathrm{B}} := \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\hbar\omega\hat{b}^\dagger(\omega)\hat{b}(\omega) \tag{8.8}
$$

である．また，

$$
\hat{N} := \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- + \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\hat{b}^\dagger(\omega)\hat{b}(\omega) \tag{8.9}
$$

と定義するとする．ここで $\hat{N}$ は，原子の励起と環境の光子数の総和を表す物理量である．このとき

$$
[\hat{N}, \hat{H}_{\mathrm{tot}}] = 0 \tag{8.10}
$$

が成り立ち，$\hat{N}$ は保存量である．

ここで，$|0\rangle|0\rangle$ を，原子が下準位にあり光子が一個もないときの全系の状態とする．すなわち，$\hat{\sigma}_-|0\rangle|0\rangle = 0$ およびすべての ω に対して $\hat{b}(\omega)|0\rangle|0\rangle = 0$ が成り立つ．また，$|1\rangle|0\rangle := \hat{\sigma}_+|0\rangle|0\rangle$ を，原子が上準位にあり光子が一個もないときの全系の状態とする．さらに，$|0\rangle|\omega\rangle := |0\rangle\hat{b}^\dagger(\omega)|0\rangle$ を，原子が下準位にあり光子が ω のモードに一個存在するときの全系の状態とする．

全系の状態ベクトル $|\psi\rangle$ の時間発展を，時刻 0 を基準とした相互作用表示で考える．初期状態を $|\psi^{\mathrm{I}}(0)\rangle = |1\rangle|0\rangle$ とすると，時刻 t における状態ベクトルは，(8.10) より

$$|\psi^{\mathrm{I}}(t)\rangle = c_1(t)|1\rangle|0\rangle + \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega c(\omega,t)|0\rangle|\omega\rangle \tag{8.11}$$

と，$|1\rangle|0\rangle$ と $|0\rangle|\omega\rangle$ の線形結合で書ける．また，相互作用ハミルトニアンの相互作用表示は

$$\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(t) = \mathrm{i}\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega [\kappa(\omega)\hat{\sigma}_+ \hat{b}(\omega) e^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t} - \kappa(\omega)^* \hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger(\omega) e^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t}] \tag{8.12}$$

である．したがって，状態ベクトルの時間発展

$$\frac{d}{dt}|\psi^{\mathrm{I}}(t)\rangle = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(t)|\psi^{\mathrm{I}}(t)\rangle \tag{8.13}$$

を確率振幅で書くと

$$\frac{dc_1(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \kappa(\omega) e^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t} c(\omega,t) \tag{8.14}$$

$$\frac{dc(\omega,t)}{dt} = -\kappa(\omega)^* e^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t} c_1(t) \tag{8.15}$$

となる．以下に示すように，これは解析的に解くことができる．

まず (8.15) を形式的に解くと

$$c(\omega,t) = -\int_0^t dt' \kappa(\omega)^* e^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t'} c_1(t') \tag{8.16}$$

となり，これを (8.14) に代入すると

$$\frac{dc_1(t)}{dt} = -\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |\kappa(\omega)|^2 \int_0^t dt' e^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t')} c_1(t') \tag{8.17}$$

が得られる．ここでローレンツ型の相互作用 (7.69)，再掲すると

$$\kappa(\omega) := \frac{g\sqrt{\kappa/2\pi}}{(\omega-\omega_{\mathrm{c}}) - \mathrm{i}\kappa/2} \tag{8.18}$$

を仮定する．ここで g は原子とキャビティモードの相互作用，ω_{c} はキャビティの共鳴周波数，κ^{-1} はキャビティの Q 値である（詳細は A.2.3 節を参照）．ここで記号の簡単化のために $\gamma := 4g^2/\kappa$，$\kappa' := \kappa/2$ とおいて (8.18) を以下のように書き直しておく:

$$\kappa(\omega) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{\kappa'}{(\omega-\omega_c) - \mathrm{i}\kappa'}. \tag{8.19}$$

このとき，

$$|\kappa(\omega)|^2 = \frac{\gamma}{2\pi}\frac{\kappa'^2}{(\omega-\omega_{\mathrm{c}})^2 + \kappa'^2} \tag{8.20}$$

となる．

さて，$t - t' > 0$ のとき，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |\kappa(\omega)|^2 e^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t')} = \frac{\gamma\kappa'}{2} e^{(-\mathrm{i}\omega_{\mathrm{c}}-\kappa')(t-t')} \tag{8.21}$$

が成り立つ．そこで

$$\eta(t-t') := \frac{\gamma\kappa'}{2}e^{(\mathrm{i}\delta-\kappa')(t-t')} \tag{8.22}$$

と定義する．ここで離調を $\delta := \omega_0 - \omega_\mathrm{c}$ とおいた．このとき (8.17) は

$$\frac{dc_1(t)}{dt} = -\int_0^t dt'\eta(t-t')c_1(t') \tag{8.23}$$

と書ける．これはラプラス変換を使って以下のように解くことができる．$t>0$ のとき，関数 $f(t)$ に対するラプラス変換を

$$\tilde{f}(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt \tag{8.24}$$

と定義すると，(8.23) の両辺のラプラス変換は

$$-1 + s\tilde{c}_1(s) = -\tilde{\eta}(s)\tilde{c}_1(s) \tag{8.25}$$

と書ける．ここで初期条件 $c_1(0)=1$ を用いた．

$$\tilde{\eta}(s) = \frac{\gamma\kappa'/2}{s+\kappa'-\mathrm{i}\delta} \tag{8.26}$$

なので，

$$\tilde{c}_1(s) = \frac{s+\kappa'-\mathrm{i}\delta}{s(s+\kappa'-\mathrm{i}\delta)+\gamma\kappa'/2} \tag{8.27}$$

を得る．ここで，λ_1 と λ_2 を s についての二次方程式

$$s(s+\kappa'-\mathrm{i}\delta)+\gamma\kappa'/2 = 0 \tag{8.28}$$

の解とすると，(8.27) は

$$\tilde{c}_1(s) = \frac{-\lambda_1-\kappa'+\mathrm{i}\delta}{\lambda_2-\lambda_1}\frac{1}{s-\lambda_1} + \frac{\lambda_2+\kappa'-\mathrm{i}\delta}{\lambda_2-\lambda_1}\frac{1}{s-\lambda_2} \tag{8.29}$$

と書ける．ここで逆ラプラス変換をすると，(8.23) の解は，$t>0$ のとき

$$c_1(t) = \frac{-\lambda_1-\kappa'+\mathrm{i}\delta}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2+\kappa'-\mathrm{i}\delta}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_2 t} \tag{8.30}$$

となる．これが我々の求めたかった解である．なお，時刻 t に原子が上準位に見出される確率 $s(t)$ は

$$s(t) := |c_1(t)|^2 \tag{8.31}$$

と書ける．

ここで (8.28) の解を

$$\lambda_1 = \frac{-\kappa'+\mathrm{i}\delta-D}{2},\ \lambda_2 = \frac{-\kappa'+\mathrm{i}\delta+D}{2} \tag{8.32}$$

とする．ここで $D := \sqrt{(\kappa'-\mathrm{i}\delta)^2-2\gamma\kappa'}$ とおいた．このとき (8.30) は

$$c_1(t) = \frac{-\kappa'+\mathrm{i}\delta+D}{2D}e^{(-\kappa'+\mathrm{i}\delta-D)t/2} + \frac{\kappa'-\mathrm{i}\delta+D}{2D}e^{(-\kappa'+\mathrm{i}\delta+D)t/2} \tag{8.33}$$

と書ける．したがって

$$
\begin{aligned}
s(t) &= e^{-\kappa' t}\left|\frac{-\kappa' + \mathrm{i}\delta + D}{2D} e^{-Dt/2} + \frac{\kappa' - \mathrm{i}\delta + D}{2D} e^{Dt/2}\right|^2 \\
&= e^{-\kappa' t}\left|\cosh\left(\frac{D}{2}t\right) + \frac{\kappa' - \mathrm{i}\delta}{D}\sinh\left(\frac{D}{2}t\right)\right|^2
\end{aligned} \tag{8.34}
$$

が得られる．ここで離調 δ がゼロの場合を考えると，$\kappa' < 2\gamma$ のとき D は虚数となり，減衰とともに振動が生じることが分かる．$\kappa' < 2\gamma$ は $4g > \kappa$ と等価なので，原子とキャビティモードの相互作用がキャビティの Q 値の逆数よりも十分大きければ振動が生じることになる．なお，マルコフ近似などをしなかったにもかかわらずシステムに不可逆なデコヒーレンスが生じる理由は，環境のモードが無限にあることに由来する．環境が無限系ならば，そこにシステムからいったん逃げて行った情報は，（非マルコフ性がある時間内では戻ってくることがあっても）長時間では決して戻ってこないのだ．

なお (8.33) において，γ と δ を一定にして $\kappa' \to \infty$ とすると，右辺第二項がのみが残り

$$
c_1(t) = e^{-\gamma t/2} \tag{8.35}
$$

となるので

$$
s(t) = e^{-\gamma t} \tag{8.36}
$$

が得られる．これはマルコフ極限に対応する．

8.1.3 ゼノ効果とアンチゼノ効果

さて，非マルコフ過程でのゼノ効果について考えよう．8.1.2 節で議論した設定において，時間間隔 τ ごとに，システムが上準位にあるか下準位にあるかを（つまり，$\hat{\sigma}_z$ を）射影測定する．N 回測定して，測定結果が常に上準位である確率を p_N とする．このとき

$$
p_N = s(\tau)^N \tag{8.37}
$$

である．

まず，$T := N\tau$ を一定として $N \to \infty$，$\tau \to 0$ の極限をとることを考える．このとき，(8.33) から

$$
\left.\frac{dc_1}{dt}\right|_{t=0} = 0 \tag{8.38}
$$

を示すことができる．したがって，

$$
\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0} = 0 \tag{8.39}
$$

となり，

$$
s(\tau) = 1 + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 s}{dt^2}\right|_{t=0}\tau^2 + o(\tau^2) \tag{8.40}
$$

と展開できる．したがって，ユニタリ過程の場合と同様にして

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} p_N &= \lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 s}{dt^2}\right|_{t=0}\tau^2\right)^N \\
&= \lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{1}{N}\frac{T}{2N}\left.\frac{d^2 s}{dt^2}\right|_{t=0}\right)^N \\
&= \lim_{N\to\infty}\exp\left(\frac{T}{2N}\left.\frac{d^2 s}{dt^2}\right|_{t=0}\right) \\
&= 1
\end{aligned} \tag{8.41}
$$

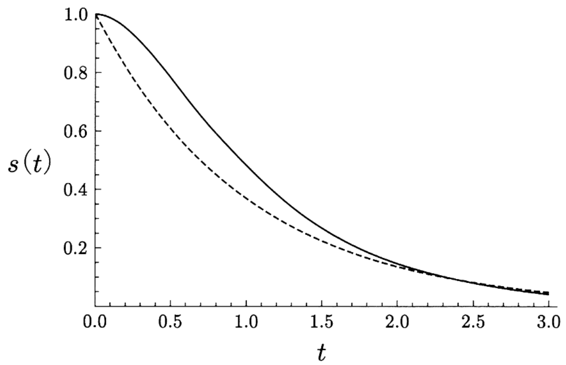


図 8.1　$s(t)$ のグラフ．実線は $\gamma = 1$，$\delta = 0$，$\kappa' = 3$ の非マルコフ的な場合で，破線は $\gamma = 1$，$\delta = 0$，$\kappa' \to \infty$ のマルコフ的な場合．$t = 0$ の付近で上に凸になっているのが，非マルコフ的な場合の特徴である．

となり，原子が上準位にとどまる確率が 1 になる．すなわち，量子ゼノ効果が生じることが分かる．

なお，上記の計算では $\kappa' < +\infty$ を仮定していた．$\kappa' \to \infty$ のマルコフ極限をとると，(8.36) より

$$s(\tau) = 1 - \gamma\tau + o(\tau) \tag{8.42}$$

である．したがって，

$$\lim_{N\to\infty} p_N = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{\gamma T}{N}\right)^N = e^{-\gamma T} \tag{8.43}$$

となり，測定をしていない場合と比べて変化がない．すなわち，量子ゼノ効果はマルコフ過程では生じず，非マルコフ過程でのみ生じることが分かる．図 8.1 に非マルコフ的な場合とマルコフ的な場合の $s(t)$ のグラフを示す．非マルコフ的な場合は，$s(t)$ の $t = 0$ における微分係数が 0 になっていることが分かる．

次に，τ が小さいとは限らない場合を考えよう．ここで

$$\Gamma(\tau) := -\frac{1}{\tau} \ln s(\tau) \tag{8.44}$$

とおくと，$T := N\tau$ に対して

$$p_N = e^{-\Gamma(\tau)T} \tag{8.45}$$

が成り立つ．また，$\Gamma(\infty) := \lim_{\tau\to+\infty} \Gamma(\tau)$ とおくと，測定がない時のシステムの長時間の振る舞いは

$$s(T) \simeq e^{-\Gamma(\infty)T} \quad (T \to +\infty) \tag{8.46}$$

と書ける．そこで，

$$\frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(\infty)} < 1 \tag{8.47}$$

が成り立つとき，測定によって上準位からの緩和を遅らせていることになる．これは（広義の）量子ゼノ効果と考えることができる．一方，

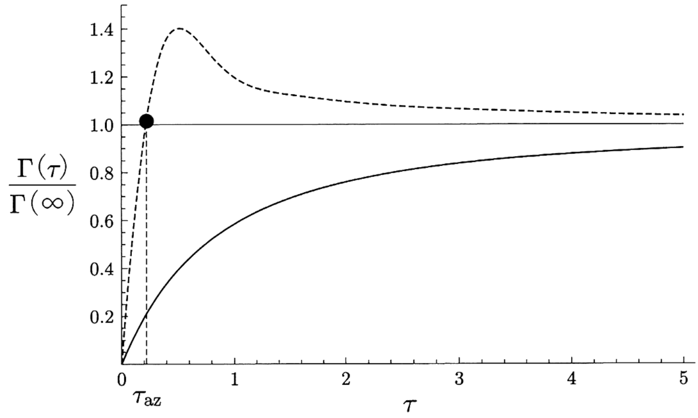


図 8.2　$\Gamma(\tau)/\Gamma(\infty)$ のグラフ．実線は $\gamma = 1$，$\delta = 0$，$\kappa' = 3$ の場合で，任意の τ で $\Gamma(\tau)/\Gamma(\infty) < 1$ なので量子ゼノ効果が生じる．破線は $\gamma = 1$，$\delta = 5$，$\kappa' = 3$ の場合で，$\tau < \tau_{\rm az}$ のときは $\Gamma(\tau)/\Gamma(\infty) < 1$ なので量子ゼノ効果，$\tau > \tau_{\rm az}$ のときは $\Gamma(\tau)/\Gamma(\infty) > 1$ なのでアンチゼノ効果が生じる．いずれの場合も，$\tau \to \infty$ の極限で $\Gamma(\tau)/\Gamma(\infty) \to 1$ となる．

$$\frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(\infty)} > 1 \tag{8.48}$$

が成り立てば，これは測定によって緩和を速めている場合に対応する．これは**アンチゼノ効果**（**anti-Zeno effect**）と呼ばれる[74]．τ が十分小さい時は，上で示したように常に量子ゼノ効果が生じる．また，$\delta \leq \kappa'$ ならばすべての $\tau < +\infty$ について量子ゼノ効果が生じる．$\delta \geq \kappa'$ ならば，δ/κ' の値で決まるある $0 < \tau_{\rm az} < +\infty$ があって，$0 < \tau < \tau_{\rm az}$ ならば量子ゼノ効果，$\tau_{\rm az} < \tau < +\infty$ ならばアンチゼノ効果が生じることが知られている[75]．図 8.2 に $\Gamma(\tau)/\Gamma(\infty)$ のグラフを示す．$\delta = 0$ の場合は量子ゼノ効果しか生じず，$\delta > \kappa'$ なら十分大きな τ でアンチゼノ効果が生じることが確かめられる．

なお，マルコフ過程の場合は，τ に依存せず $\Gamma(\tau) = \gamma = \Gamma(\infty)$ なので，量子ゼノ効果もアンチゼノ効果も起こらない*2)．

8.2　ダイナミカル・デカップリング

位相緩和によってデコヒーレンスするシステムを考える．このデコヒーレンスが非マルコフ的であれば，システムに対して定期的に強いユニタリ変換をかけることで，デコヒーレンスを抑制することができる．これが**ダイナミカル・デカップリング**（**dynamical decoupling**）と呼ばれる方法である*3)．ここで，ユニタリ変換によって環境に逃げた情報が戻ってくるので，非マルコフ性が本質的な役割を果たす．システムだけにユニタリ変

*2)　ただし，システムに対する測定が射影測定でなければ，マルコフ過程でもゼノ効果やアンチゼノ効果が起こりうることが知られている[75]．

*3)　本書で解説する方法は [76] において提案された．類似した現象として，**スピンエコー**（**spin echo**）が古くから知られている．

換をかければデコヒーレンスが回復するというのが，この方法の興味深い点である．

8.2.1 基本的なアイデア

まずは簡単な場合について，ダイナミカル・デカップリングの基本的な考え方を述べよう．システムも環境もそれぞれ 1 キュービットとする．システムと環境の自由ハミルトニアンは無視し，相互作用ハミルトニアンが

$$\hat{H}_{\rm int} := \hbar g \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \tag{8.49}$$

と書けるとする．このとき，時刻 0 から t までの全系のユニタリ発展は

$$\hat{U}(t) := \exp\left(-{\rm i}\hat{H}_{\rm int}t/\hbar\right) = \cos(gt)\hat{I}\otimes\hat{I} - {\rm i}\sin(gt)\hat{\sigma}_z\otimes\hat{\sigma}_z \tag{8.50}$$

で与えられる．ここで全系の初期状態を $\hat{\rho}_{\rm tot} := \hat{\rho}\otimes\hat{\rho}_{\rm B}$ とおく．$\hat{\rho}_{\rm B}$ は環境の適当な初期状態で，簡単のため ${\rm tr}[\hat{\rho}\hat{\sigma}_z] = 0$ を満たすとする．このとき，時刻 t におけるシステムの状態は

$$\hat{\rho}(t) = {\rm tr}_{\rm B}[\hat{U}(t)\hat{\rho}_{\rm tot}\hat{U}^\dagger(t)] = \cos^2(gt)\hat{\rho} + \sin^2(gt)\hat{\sigma}_z\hat{\rho}\hat{\sigma}_z \tag{8.51}$$

となる．この結果は，環境とのユニタリ相互作用のシステムに与える効果が，$\cos(gt)\hat{I}$ と $\sin(gt)\hat{\sigma}_z$ をクラウス演算子とする位相緩和であることを示している．非対角項の大きさは

$${\rm tr}[\hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_+] = \cos(2gt){\rm tr}[\hat{\rho}\hat{\sigma}_+] \tag{8.52}$$

となる．環境はキュービットなので，モードが無限にあるわけではない．したがって，デコヒーレンスは不可逆ではなく，コヒーレンスの度合は一定の周期で振動している．

さて，時刻 τ にシステムに瞬間的にパルスをあて，

$$\hat{U}_{\rm P} := \hat{\sigma}_x \otimes \hat{I} \tag{8.53}$$

というユニタリ変換をかける．このユニタリ発展は τ に比べて無視できる非常に短い時間で起きるとする．すなわち，非常に強いパルスを当てる．そのあとさらに，時刻 $\tau + t$ まで環境と相互作用してユニタリ発展すると，時刻 0 からのユニタリ発展は $\hat{U}(t)\hat{U}_{\rm P}\hat{U}(\tau)$ で与えらえる．これを計算すると

$$\begin{aligned}
&\hat{U}(t)\hat{U}_{\rm P}\hat{U}(\tau)\\
&\quad = (\cos(gt)\hat{I}\otimes\hat{I} - {\rm i}\sin(gt)\hat{\sigma}_z\otimes\hat{\sigma}_z)\hat{\sigma}_x\otimes\hat{I}(\cos(g\tau)\hat{I}\otimes\hat{I} - {\rm i}\sin(g\tau)\hat{\sigma}_z\otimes\hat{\sigma}_z)\\
&\quad = \hat{\sigma}_x\otimes\hat{I}[\cos(\tau - t)\hat{I}\otimes\hat{I} - {\rm i}\sin(\tau - t)\hat{\sigma}_z\otimes\hat{\sigma}_z]\\
&\quad = \hat{\sigma}_x\otimes\hat{I}\hat{U}(\tau - t)
\end{aligned} \tag{8.54}$$

となる．すなわち，$\hat{U}_{\rm P}$ の効果によって，時刻 τ 以降の相互作用が時間反転していることが分かる．ここで本質的なのは

$$\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x = -\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_z \tag{8.55}$$

という関係である．このことによって相互作用を時間反転させ，環境に散逸した情報を回収することができる．

とくに $t=\tau$ のとき，

$$\hat{U}(\tau)\hat{U}_{\mathrm{P}}\hat{U}(\tau)=\hat{\sigma}_x\otimes\hat{I}=\hat{U}_{\mathrm{P}} \tag{8.56}$$

となる．これはシステムだけに対するユニタリ発展に他ならない．したがって，時刻 0 に純粋状態だったシステムは，時刻 2τ に再び純粋状態に戻る．時刻 τ にシステムに強いパルスをあてたことで，時刻 2τ におけるデコヒーレンスを打ち消したことになる．なお，いまはデコヒーレンスが可逆的なので，(8.52) が示すように，パルスをあてなくても $\pi/2g$ を周期としてコヒーレンスは自然に回復する．ここでのポイントは，$\pi/2g$ よりも早い時間にパルスをあてれば，コヒーレンスの回復を早めることができる点にある．さらに，ここで議論している可逆な場合だけでなく，不可逆なデコヒーレンスもダイナミカル・デカップリングで回復させられる．これについては，8.2.3 節で議論する．

時刻 2τ のあと再びシステムと環境が相互作用すると，システムはデコヒーレンスをする．そこで時刻 3τ にパルスをあてると，時刻 4τ のシステムのデコヒーレンスを打ち消すことができる．このように時刻 $\tau,3\tau,5\tau,\cdots$ とパルスをあてることで，時刻 $2\tau,4\tau,6\tau,\cdots$ におけるデコヒーレンスを打ち消すことができる．このようなパルスは，しばしば**バンバンパルス**（**bang-bang pulse**）と呼ばれる．もし時刻 $2\tau,4\tau,6\tau,\cdots$ システムを初期状態に完全に戻したければ，これらの時刻にも $\hat{U}_{\mathrm{P}}$ のパルスをあてればよい（$\hat{U}_{\mathrm{P}}^2=\hat{I}$ より）．とくに $\tau\to 0$ の極限で，システムは時間発展しなくなる．これは量子ゼノ効果に似た現象である．

デコヒーレンスを定量化するために，時刻 t におけるシステムの純粋度を

$$P(t):=\mathrm{tr}[\hat{\rho}(t)^2] \tag{8.57}$$

と定義する．これは $1/2\le P(t)\le 1$ を満たし，システムは $P(t)=1$ のとき純粋状態，$P(t)=1/2$ のとき完全混合状態である．システムの初期条件を $\hat{\rho}=|+\rangle\langle+|$（ここで $|+\rangle$ は $\hat{\sigma}_x$ の固有値 $+1$ の固有状態）として，$P(t)$ を計算すると

$$P(t)=\begin{cases}1-\sin^2(2g(t-\tau_{2n}))/2 & (\tau_{2n}\le t<\tau_{2n+1})\\ 1-\sin^2(2g(\tau_{2(n+1)}-t))/2 & (\tau_{2n+1}\le t<\tau_{2(n+1)})\end{cases} \tag{8.58}$$

となる．ここで $\tau_n:=n\tau$ $(n=0,1,\cdots)$ とした．図 8.3 に，パルスをあてた場合とあてない場合の両方についての $P(t)$ の時間発展を示す．パルスをあてることでデコヒーレンスが抑制されていることが分かる．

8.2.2 スピン・ボゾンモデル

不可逆なデコヒーレンスが生じる場合もダイナミカル・デカップリングが機能することをみるために，**スピン・ボゾンモデル**（**spin-boson model**）を考えよう．二準位系のシステムがボゾンの環境（電磁場よりもむしろフォノンを念頭に置いている）と相互作用しているとする．波数 k のボゾンの消滅演算子を $\hat{b}(k)$ として，周波数を ω_k とする．全系のハミルトニアンを

$$\hat{H}_{\mathrm{tot}}:=\hat{H}_{\mathrm{S}}+\hat{H}_{\mathrm{int}}+\hat{H}_{\mathrm{B}}, \tag{8.59}$$

ここで

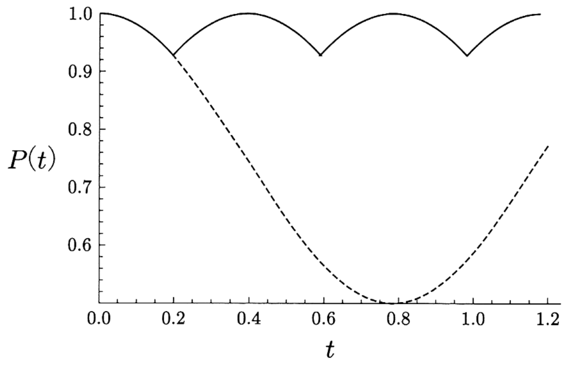


図 8.3　$P(t)$ のグラフ．実線はパルスをあてた場合 (8.58)，破線はパルスをあてない場合．$g=1$，$\tau=1/16$ とした．

$$\hat{H}_{\mathrm{S}} := \frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z, \tag{8.60}$$

$$\hat{H}_{\mathrm{int}} := \hbar\hat{\sigma}_z \otimes \sum_k [g_k \hat{b}^\dagger(k) + g_k^* \hat{b}(k)], \tag{8.61}$$

$$\hat{H}_{\mathrm{B}} := \sum_k \hbar\omega_k \hat{b}^\dagger(k)\hat{b}(k) \tag{8.62}$$

とする．ここで g_k はシステムと波数 k のボゾンの相互作用を特徴づける定数である．ここで，システムと環境との相互作用の強さを特徴づけるスペクトル関数

$$D(\omega) := \sum_k \delta(\omega - \omega_k)|g_k|^2 \tag{8.63}$$

を導入しよう．$D(\omega)$ の具体形としては，デバイ型

$$D(\omega) := \frac{\omega}{4}e^{-\omega/\omega_{\mathrm{D}}} \tag{8.64}$$

を仮定することが多い．ここで ω_{D} はデバイ周波数である．

時刻 t_0 における全系の初期状態を $\hat{\rho}\otimes\hat{\rho}_{\mathrm{B}}$ とする．$\hat{\rho}_{\mathrm{B}}$ は環境の熱平衡状態

$$\hat{\rho}_{\mathrm{B}} := e^{\beta(F_{\mathrm{B}} - H_{\mathrm{B}})} \tag{8.65}$$

とする．ここで β は逆温度，$F_{\mathrm{B}} := -\beta^{-1}\ln[\mathrm{tr}e^{-\beta H_{\mathrm{B}}}]$ は環境の自由エネルギーである．

$\hat{H}_{\mathrm{S}} + \hat{H}_{\mathrm{B}}$ について時刻 0 を基準とした相互作用表示をとると

$$\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(t) = \hbar\hat{\sigma}_z \otimes \sum_k [g_k \hat{b}^\dagger(k)e^{\mathrm{i}\omega_k t} + g_k^* \hat{b}(k)e^{-\mathrm{i}\omega_k t}] \tag{8.66}$$

となる．時刻 t_0 から t までの時間発展演算子は，時間順序積 $\mathrm{T}\exp$ を使って

$$\hat{U}^{\mathrm{I}}(t, t_0) = \mathrm{T}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' \hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(t')\right) \tag{8.67}$$

と書ける．ここで，任意の t, t' に対して $[\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(t), \hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(t')]$ はスカラーなので，スカラー倍（全体にかかる位相因子）を除いて

$$\hat{U}^{\mathrm{I}}(t,t_0)=\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t}dt'\hat{H}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{int}}(t')\right) \tag{8.68}$$

と書くことができる．ここで

$$\xi_k(t,t_0):=\frac{2g_k}{\omega_k}(e^{\mathrm{i}\omega_k t_0}-e^{\mathrm{i}\omega_k t}) \tag{8.69}$$

とおくと

$$\hat{U}^{\mathrm{I}}(t,t_0)=\exp\left(\frac{\hat{\sigma}_z}{2}\otimes\sum_k[\xi_k(t,t_0)\hat{b}^\dagger(k)-\xi_k(t,t_0)^*\hat{b}(k)]\right) \tag{8.70}$$

と書ける．$\hat{\sigma}_z^2=\hat{I}_{\mathrm{S}}$ に注意すると，

$$\hat{U}^{\mathrm{I}}(t,t_0)=\hat{I}_{\mathrm{S}}\otimes\hat{C}(t,t_0)+\hat{\sigma}_z\otimes\hat{S}(t,t_0), \tag{8.71}$$

$$\hat{C}(t,t_0):=\cosh\left(\frac{\hat{x}(t,t_0)}{2}\right),\ \hat{S}(t,t_0):=\sinh\left(\frac{\hat{x}(t,t_0)}{2}\right), \tag{8.72}$$

$$\hat{x}(t,t_0):=\sum_k[\xi_k(t,t_0)\hat{b}^\dagger(k)-\xi_k(t,t_0)^*\hat{b}(k)] \tag{8.73}$$

を得る．なお，任意の t_1 について

$$\hat{x}(t_1,t)+\hat{x}(t,t_0)=\hat{x}(t_1,t_0) \tag{8.74}$$

が成り立つことと，双曲関数の加法定理に注意すると，

$$\hat{U}^{\mathrm{I}}(t_1,t)\hat{U}^{\mathrm{I}}(t,t_0)=\hat{U}^{\mathrm{I}}(t_1,t_0) \tag{8.75}$$

が成立することが分かる．

また，ボゾンの熱平衡状態の特性関数の性質*4)を使うと，

$$\mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{B}}e^{\hat{x}(t,t_0)}]=\mathrm{tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{B}}e^{-\hat{x}(t,t_0)}]=\exp\left(-\sum_k\frac{|\xi_k(t,t_0)|^2}{2}\coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_k}{2}\right)\right) \tag{8.76}$$

が成り立つ．したがって

$$\mathrm{tr}[\hat{C}(t,t_0)\hat{\rho}_{\mathrm{B}}\hat{C}(t,t_0)]=\frac{1+e^{-\Gamma(t,t_0)}}{2},\ \mathrm{tr}[\hat{S}(t,t_0)\hat{\rho}_{\mathrm{B}}\hat{S}(t,t_0)]=\frac{-1+e^{-\Gamma(t,t_0)}}{2}, \tag{8.77}$$

ここで

$$\Gamma(t,t_0):=\sum_k\frac{|\xi_k(t,t_0)|^2}{2}\coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_k}{2}\right) \tag{8.78}$$

を得る．また，

$$\mathrm{tr}[\hat{S}(t,t_0)\hat{\rho}_{\mathrm{B}}\hat{C}(t,t_0)]=\mathrm{tr}[\hat{C}(t,t_0)\hat{\rho}_{\mathrm{B}}\hat{S}(t,t_0)]=0 \tag{8.79}$$

である．$\hat{C}^\dagger(t,t_0)=\hat{C}(t,t_0)$，$\hat{S}^\dagger(t,t_0)=-\hat{S}(t,t_0)$ に注意すると，時刻 t におけるシステムの状態は

*4）　やや煩雑な計算になるので省略する．詳細は [22] を参照．

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho}(t) &:= \mathrm{tr}[\hat{U}^{\mathrm{I}}(t,t_0)\hat{\rho}\otimes\hat{\rho}_{\mathrm{B}}\hat{U}^{\dagger\mathrm{I}}(t,t_0)] \\
&= \frac{1+e^{-\Gamma(t,t_0)}}{2}\hat{\rho}+\frac{1-e^{-\Gamma(t,t_0)}}{2}\hat{\sigma}_z\hat{\rho}\hat{\sigma}_z
\end{aligned} \tag{8.80}
$$

となる．すなわち，位相緩和が生じることが分かる．不可逆なデコヒーレンスが生じていることを見るために，システムの密度演算子の（エネルギー基底に関する）非対角項のダイナミクスを見ると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}[\hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_+] &= \mathrm{tr}[\hat{\rho}\hat{\sigma}_+]\left(\frac{1+e^{-\Gamma(t,t_0)}}{2}-\frac{1-e^{-\Gamma(t,t_0)}}{2}\right) \\
&= \mathrm{tr}[\hat{\rho}\hat{\sigma}_+]e^{-\Gamma(t,t_0)}
\end{aligned} \tag{8.81}
$$

となっている．ここで $\Gamma(t,t_0)$ は

$$
\Gamma(t,t_0)=\sum_k 4|g_k|^2\frac{1-\cos(\omega_k(t-t_0))}{\omega_k^2}\coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_k}{2}\right) \tag{8.82}
$$

と書ける．これは，(8.63) の $D(\omega)$ を使うと

$$
\Gamma(t,t_0)=\int_0^{+\infty}4D(\omega)\frac{1-\cos(\omega(t-t_0))}{\omega^2}\coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \tag{8.83}
$$

とも書ける．デバイ型のように $D(\omega)$ を ω の連続関数とする（すなわち，環境のモードが無限にあるとする）と，デコヒーレンスは不可逆的になる．

8.2.3 スピン・ボゾンモデルのダイナミカル・デカップリング

さて，スピン・ボゾンモデルのデコヒーレンスをダイナミカル・デカップリングで抑制することを考えよう．$t_0 := 0$ として，時刻 τ にシステムに次のようなパルスをあてる:

$$
\hat{U}_{\mathrm{P}} := \hat{\sigma}_x\otimes\hat{I}. \tag{8.84}
$$

ここで θ は適当な定数である．8.2.1 節での議論のように，パルスの照射時間は一瞬であると仮定する．すなわち，パルスは非常に強いとする．

交換関係 (8.55) に注意すると，

$$
\hat{U}^{\mathrm{I}}(t+\tau,\tau)\hat{\sigma}_x\otimes\hat{I}=\hat{\sigma}_x\otimes\hat{I}\hat{U}^{\mathrm{I}}(\tau,\tau+t) \tag{8.85}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\hat{U}^{\mathrm{I}}(\tau,\tau+t) &:= \exp\left(-\frac{\hat{\sigma}_z}{2}\otimes\sum_k[\xi_k(\tau+t,\tau)\hat{b}^\dagger(k)-\xi_k(\tau+t,\tau)^*\hat{b}(k)]\right) \\
&= \exp\left(\frac{\hat{\sigma}_z}{2}\otimes\sum_k[\xi_k(\tau,\tau+t)\hat{b}^\dagger(k)-\xi_k(\tau,\tau+t)^*\hat{b}(k)]\right)
\end{aligned} \tag{8.86}
$$

が成り立つ．すなわち，σ_x の効果で，時刻 τ 以降のダイナミクスが時間反転することが分かる．したがって，時刻 $t+\tau$ $(t>0)$ までの全系の時間発展のユニタリ演算子は

$$
\hat{U}^{\mathrm{I}}(\tau+t,\tau)\hat{U}_{\mathrm{P}}\hat{U}^{\mathrm{I}}(\tau,0)=\hat{U}_{\mathrm{P}}\hat{U}^{\mathrm{I}}(\tau,\tau+t,)\hat{U}^{\mathrm{I}}(\tau,0) \tag{8.87}
$$

となる．ここで

$$\hat{U}^{\mathrm{I}}(\tau+t,\tau)\hat{U}^{\mathrm{I}}(\tau,0)=\exp\left(\frac{\hat{\sigma}_z}{2}\otimes\sum_k[\tilde{\xi}_k(\tau+t,0)\hat{b}^\dagger(k)-\tilde{\xi}_k(\tau+t,0)^*\hat{b}(k)]\right), \tag{8.88}$$

$$\tilde{\xi}_k(\tau+t,0):=\xi_k(\tau,\tau+t)+\xi_k(\tau,0) \tag{8.89}$$

が成り立つ．とくに $t=\tau$ とおくと，

$$\tilde{\xi}_k(2\tau,0)=\frac{2g_k}{\omega_k}(1-e^{\mathrm{i}2\omega_k\tau})^2 \tag{8.90}$$

が得られる．これに対応して，実効的な緩和レートが

$$\tilde{\Gamma}(2\tau,0):=\sum_k\frac{|\tilde{\xi}_k(2\tau,0)|^2}{2}\coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_k}{2}\right) \tag{8.91}$$

になることが分かる．

デコヒーレンスがどのように抑制されたかを見るために，$\xi_k(2\tau,0)$ と $\tilde{\xi}_k(2\tau,0)$ を比べてみよう．まず

$$|\xi_k(2\tau,0)|^2=\frac{16|g_k|^2}{\omega_k^2}\sin^2(\omega_k\tau) \tag{8.92}$$

が成り立つ．一方，

$$|\tilde{\xi}_k(2\tau,0)|^2=\frac{16|g_k|^2}{\omega_k^2}(1-\cos(\omega_k\tau))^2 \tag{8.93}$$

が成り立つ．したがって

$$|\xi_k(2\tau,0)|^2-|\tilde{\xi}_k(2\tau,0)|^2=\frac{32|g_k|^2}{\omega_k^2}\cos(\omega_k\tau)(1-\cos(\omega_k\tau)) \tag{8.94}$$

が得られる．もし $\omega_k\tau<\pi/2$ ならば，

$$|\xi_k(2\tau,0)|^2-|\tilde{\xi}_k(2\tau,0)|^2>0 \tag{8.95}$$

が成り立つ．ここで，システムと環境の相互作用を特徴づける周波数の上限を ω_{c} とする．すなわち，$\omega>\omega_{\mathrm{c}}$ ならば $D(\omega)\simeq 0$ とする．もしも

$$\omega_{\mathrm{c}}\tau<\pi/2 \tag{8.96}$$

が満たされているならば，すべての ω_k に対して (8.95) が成り立つことになる．この場合，

$$\tilde{\Gamma}(2\tau,0)<\Gamma(2\tau,0) \tag{8.97}$$

となり，デコヒーレンスが抑制されることが分かる．すなわち，システムと環境の相互作用を特徴づける最短の時間スケールよりも短い間隔でパルスをあてれば，デコヒーレンスを抑制することができる．

これを繰り返し，時刻 $\tau,3\tau,5\tau,\cdots$ にパルスをあてることで，システムの緩和を遅らせることができる．また，時刻 $2\tau,4\tau,6\tau,\cdots$ にもパルス $\hat{U}_{\mathrm{P}}$ をあてることで，(8.87) の右辺の $\hat{U}_{\mathrm{P}}$ に由来する余分なユニタリ変換を打ち消すことができる．すなわち，$N=1,2,\cdots$ に対して

$$\mathrm{T}\prod_{n=0}^{N-1}\hat{U}_{\mathrm{P}}\hat{U}^{\mathrm{I}}(\tau_{2(n+1)},\tau_{2n+1})\hat{U}_{\mathrm{P}}\hat{U}^{\mathrm{I}}(\tau_{2n+1},\tau_{2n}) = \mathrm{T}\prod_{n=0}^{N-1}\hat{U}^{\mathrm{I}}(\tau_{2n+1},\tau_{2(n+1)})\hat{U}^{\mathrm{I}}(\tau_{2n+1},\tau_{2n}) \tag{8.98}$$

が成り立つ．ここで $\tau_n := n\tau$ とおいた．また，$\mathrm{T}\prod_{n=1}^{N-1}$ は時間順序積である．ここで

$$\begin{aligned}&\mathrm{T}\prod_{n=0}^{N-1}\hat{U}^{\mathrm{I}}(\tau_{2n+1},\tau_{2(n+1)})\hat{U}^{\mathrm{I}}(\tau_{2n+1},\tau_{2n})\\ &=\exp\left(\frac{\hat{\sigma}_z}{2}\otimes\sum_k[\tilde{\xi}_k(2N\tau,0)\hat{b}^\dagger(k)-\tilde{\xi}_k(2N\tau,0)^*\hat{b}(k)]\right),\end{aligned} \tag{8.99}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_k(2N\tau,0) &:= \sum_{n=0}^{N-1}\frac{2g_k}{\omega_k}e^{\mathrm{i}2\omega_k n\tau}(1-e^{\mathrm{i}\omega_k\tau})^2\\ &=\frac{2g_k}{\omega_k}\frac{1-e^{\mathrm{i}\omega_k\tau}}{1+e^{\mathrm{i}\omega_k\tau}}(1-e^{\mathrm{i}2\omega_k N\tau})\end{aligned} \tag{8.100}$$

が成り立つ．したがって，実効的な緩和レートは

$$\tilde{\Gamma}(2N\tau,0) := \sum_k\frac{|\tilde{\xi}_k(2N\tau,0)|^2}{2}\coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_k}{2}\right) \tag{8.101}$$

となることが分かる．

N 回パルスをあてるとき，$N\tau$ を一定として $N\to\infty$，$\tau\to 0$ の極限をとることを考えよう．このとき，(8.100) より

$$\lim_{\tau\to 0}\tilde{\xi}_k(2N\tau,0)=0 \tag{8.102}$$

が得られる．したがって

$$\lim_{\tau\to 0}\tilde{\Gamma}(2N\tau,0)=0 \tag{8.103}$$

が成り立ち，デコヒーレンスは完全に抑制されることが分かる．

付録 A
光と原子の物理

この付録では，光すなわち電磁場の量子状態と，それと原子との相互作用について議論する．

A.1 光の量子状態

A.1.1 電磁場の演算子

まずは電磁場の演算子を一般的に定式化しよう．有限の体積 V の三次元空間内で周期境界条件を満足する電磁場を考える．ゲージはクーロンゲージをとる．波数 $\vec{k}$ および直線偏光モード λ に対応する消滅演算子と生成演算子を，それぞれ $\hat{a}(\vec{k},\lambda)$ と $\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)$ とする．これらは以下のような正準交換関係を満たす:

$$\begin{aligned}&[\hat{a}(\vec{k},\lambda),\hat{a}(\vec{k}',\lambda')]=0,\\&[\hat{a}(\vec{k},\lambda),\hat{a}^\dagger(\vec{k}',\lambda')]=\delta_{\lambda,\lambda'}\delta_{\vec{k},\vec{k}'}.\end{aligned} \tag{A.1}$$

ここで δ はクロネッカーのデルタである．電磁場のハミルトニアンは，ゼロ点エネルギーを無視すれば

$$\hat{H}_{\mathrm{B}}=\sum_{\vec{k},\lambda}\hbar\omega_k\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k},\lambda) \tag{A.2}$$

と書ける．ここで ω_k は周波数で，$\omega_k=c|\vec{k}|$ を満たす（c は光速度）．

また，位置 $\vec{r}$ における電場演算子 $\hat{\vec{E}}(\vec{r})$ は

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r})=\mathrm{i}\sum_{\vec{k},\lambda}\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}}\vec{e}(\vec{k},\lambda)(\hat{a}(\vec{k},\lambda)e^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}-\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)e^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}), \tag{A.3}$$

磁場演算子 $\hat{\vec{B}}(\vec{r})$ は

$$\hat{\vec{B}}(\vec{r})=\mathrm{i}\sum_{\vec{k},\lambda}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_k V}}\vec{k}\times\vec{e}(\vec{k},\lambda)(\hat{a}(\vec{k},\lambda)e^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}-\hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)e^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}) \tag{A.4}$$

で与えられる．ここで ε_0 は真空の誘電率，$\times$ は三次元ベクトルの外積を表す．$\hat{\vec{E}}$ と $\hat{\vec{B}}$ はともに，各成分が演算子であるような三次元ベクトルである．$\vec{e}(\vec{k},\lambda)$ はモード $(\vec{k},\lambda)$ の

偏光方向を表すベクトルであり，三次元実ベクトルである．$\lambda = x, y$ に対して，$\vec{e}(\vec{k}, x)$ と $\vec{e}(\vec{k}, y)$ は直交している．また，ゲージがクーロンゲージなので，これら二つの偏光ベクトルは $\vec{k}$ とも直交している．$\vec{k}$ の l 成分（$l = x, y, z$）を k_l，$\vec{e}(\vec{k}, \lambda)$ の l 成分を $e_l(\vec{k}, \lambda)$ とすると，

$$\sum_{\lambda=x,y} e_l(\vec{k}, \lambda) e_{l'}(\vec{k}, \lambda) + \frac{k_l k_{l'}}{|\vec{k}|^2} = \delta_{ll'} \tag{A.5}$$

が成立する．これは，三次元実空間の正規直交基底 $\{\vec{e}(\vec{k}, x), \vec{e}(\vec{k}, y), \vec{k}/|\vec{k}|\}$ の完全性条件に他ならない．

以上は空間体積 V が有限の場合だったが，無限に広がった自由空間内にある電磁場を考えることもできる．これは波数が連続値をとる極限に相当する．簡単のため空間次元は一次元（z 軸方向）として，単一の偏光モードだけを考える．まず空間の長さが L の周期境界条件から出発して，$L \to \infty$ の極限を考える．波数 k のモードの消滅演算子を $\hat{a}(k)$ として，その交換関係を

$$[\hat{a}(k), \hat{a}^\dagger(k')] = \delta_{kk'} \tag{A.6}$$

とする．位置 z における電場演算子は

$$\hat{E}(z) = \sum_k \mathrm{i} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 L}} (\hat{a}(k) e^{\mathrm{i}kz} - \hat{a}^\dagger(k) e^{-\mathrm{i}kz}) \tag{A.7}$$

と書ける．とりうる波数 k の間隔を $\Delta k := 2\pi/L$ として，消滅演算子を

$$\hat{a}(k) \mapsto \frac{\hat{a}(k)}{\sqrt{\Delta k}} \tag{A.8}$$

と規格化し直す．この再規格化された生成消滅演算子が従う交換関係は

$$[\hat{a}(k), \hat{a}^\dagger(k')] = \frac{\delta_{kk'}}{\Delta k} \tag{A.9}$$

となる．また，電場演算子は

$$\hat{E}(z) = \sum_k \mathrm{i} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{4\pi\varepsilon_0}} (\hat{a}(k) e^{\mathrm{i}kz} - \hat{a}^\dagger(k) e^{-\mathrm{i}kz}) \Delta k \tag{A.10}$$

と書き直せる．ここで $L \to \infty$ の極限をとり，$\Delta k \to dk$ としてシグマを積分に置き換える．すると交換関係は

$$[\hat{a}(k), \hat{a}^\dagger(k')] = \delta(k - k') \tag{A.11}$$

となる．また，電場演算子は

$$\hat{E}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{i} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{4\pi\varepsilon_0}} (\hat{a}(k) e^{\mathrm{i}kz} - \hat{a}^\dagger(k) e^{-\mathrm{i}kz}) dk \tag{A.12}$$

となり，電磁場のハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\mathrm{B}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hbar\omega_k \hat{a}^\dagger(k) \hat{a}(k) \tag{A.13}$$

となる．

A.1.2 コヒーレント状態とスクイズド状態

次に，電磁場の重要な量子状態である**コヒーレント状態**（**coherent state**）と**スクイズド状態**（**squeezed state**）について議論しよう．以下では簡単のために，特定の波数 $\vec{k}$ と偏光 λ をもったモードだけを考えることにし，これらの添え字を省略する．このモードの光子数は，個数演算子 $\hat{n} := \hat{a}^\dagger \hat{a}$ で記述される．光子が一個もない状態は，$\hat{n}$ の固有値が 0 の固有状態，すなわち真空であり，それを $|0\rangle$ と書く．真空に対しては $\hat{a}|0\rangle = 0$ が成立する．一般に，光子数が n であるような固有状態は，**フォック状態**（**Fock state**）と呼ばれ，

$$|n\rangle := \frac{1}{\sqrt{n}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle \tag{A.14}$$

で与えられる．フォック状態 $|n\rangle$ $(= 0, 1, 2, \cdots)$ は，このモードの電磁場の状態を記述するヒルベルト空間の正規直交基底をなす: $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$．また，$\theta$ を実数として，θ 方向の**直交位相振幅**を

$$\hat{x}_\theta := \frac{\hat{a}e^{-\mathrm{i}\theta} + \hat{a}^\dagger e^{\mathrm{i}\theta}}{2},\ \hat{p}_\theta := \frac{\hat{a}e^{-\mathrm{i}\theta} - \hat{a}^\dagger e^{\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}} \tag{A.15}$$

と定義する．これらは交換関係

$$[\hat{x}_\theta, \hat{p}_\theta] = \frac{\mathrm{i}}{2} \tag{A.16}$$

を満たす．とくに，$\theta = 0$ のときの直交位相振幅を，$\hat{x}$，$\hat{p}$ と書く．

さて，固有値が複素数 α であるような $\hat{a}$ の固有状態を $|\alpha\rangle$ と書き，これを振幅が α のコヒーレント状態と呼ぶ．すなわち，

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{A.17}$$

である．とくに $\alpha = 0$ のとき，これは真空に他ならない．コヒーレント状態における光子数の期待値は

$$\langle\alpha|\hat{n}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle = |\alpha|^2 \tag{A.18}$$

となる．コヒーレント状態は，直交位相振幅に関する最小不確定性状態の一つである．実際，(2.85) によって定義される物理量の分散を計算すると

$$\langle\Delta\hat{x}_\theta^2\rangle = \langle\Delta\hat{p}_\theta^2\rangle = \frac{1}{4} \tag{A.19}$$

となり，これはケナード・ロバートソンの不確定性関係 (2.86) の等号を達成している:

$$\langle\Delta\hat{x}_\theta^2\rangle\langle\Delta\hat{p}_\theta^2\rangle = \frac{1}{16}. \tag{A.20}$$

図 A.1 にコヒーレント状態の模式図を示す．

コヒーレント状態の性質をより詳しく調べるため，次のような変位演算子 (displacement operator) を定義する:

$$\hat{D}(\alpha) := e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}. \tag{A.21}$$

これはユニタリ演算子であり，次の関係を満たす:*1)

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha,\ \hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*. \tag{A.22}$$

*1) 証明はたとえば [8] を参照.

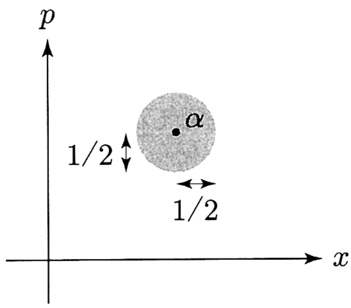


図 A.1　コヒーレント状態の模式図．α の実部と虚部が，それぞれ円の中心の x 座標と p 座標を与えている．円の半径はコヒーレント状態のゆらぎの大きさを模式的に示している．

ここで

$$\hat{a}\hat{D}(\alpha)|0\rangle = \hat{D}(\alpha)(\hat{a}+\alpha)|0\rangle = \alpha\hat{D}(\alpha)|0\rangle \tag{A.23}$$

が成り立つことに注意すると，コヒーレント状態は次のように書けることが分かる:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle. \tag{A.24}$$

また，ベーカー・ハウスドルフの公式（Baker-Hausdorff's formula）[*2] を用いると，

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}} \tag{A.25}$$

が成り立つことが分かる．$e^{-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle = |0\rangle$ に注意すると，

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{A.26}$$

が得られる．したがって，コヒーレント状態における光子数分布は

$$P(n) = e^{-|\alpha|^2}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \tag{A.27}$$

となる．これは期待値が $|\alpha|^2$ のポアソン分布に他ならない．

次に，直交位相振幅の最小不確定性関係 (A.20) を満たしたまま，一方の分散を小さくして他方を大きくする状態を考えよう．これをスクイズド状態と呼ぶ．次のようなスクイズ演算子を定義する:

$$\hat{S}(\xi) := \exp\left(\frac{\xi^*\hat{a}^2 - \xi(\hat{a}^\dagger)^2}{2}\right). \tag{A.28}$$

ここで ξ は複素数であり，$\xi = re^{\mathrm{i}\theta}$ とする（r, θ は実数）．$\hat{S}(\xi)$ はユニタリ演算子であり，次の性質を満たす:

$$\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}\hat{S}(\xi) = \hat{a}\cosh r - \hat{a}^\dagger e^{\mathrm{i}\theta}\sinh r,\quad \hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}^\dagger\hat{S}(\xi) = \hat{a}^\dagger\cosh r - \hat{a}e^{-\mathrm{i}\theta}\sinh r. \tag{A.29}$$

ここで $\theta = 0$ とすると，直交位相振幅は

*2)　演算子 $\hat{A}$ と $\hat{a}$ が $[\hat{A},[\hat{A},\hat{a}]]=0$，$[\hat{a},[\hat{A},\hat{a}]]=0$ を満たすなら，$e^{\hat{A}+\hat{a}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{a}}e^{-[\hat{A},\hat{a}]/2}$ が成立する．

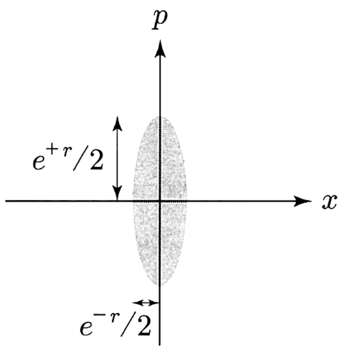


図 A.2　スクイズドされた真空の模式図．$r > 0$ の場合は，x 方向のゆらぎが圧搾され，p 方向の揺らぎが増大している．

$$\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{x}\hat{S}(\xi) = \hat{x}e^{-r}, \quad \hat{S}^\dagger(\xi)\hat{p}\hat{S}(\xi) = \hat{p}e^{r} \tag{A.30}$$

と変換される．

たとえば，$\hat{S}(\xi)$ を真空に作用させた状態を考える:

$$|0\rangle_\xi := \hat{S}(\xi)|0\rangle. \tag{A.31}$$

この状態は，スクイズされた真空と呼ばれる．この状態における $\hat{x}$ と $\hat{p}$ の期待値はいずれもゼロであるが，分散は

$$\begin{aligned} \langle\Delta\hat{x}^2\rangle &= {}_\xi\langle 0|\hat{x}^2|0\rangle_\xi = \langle 0|(\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{x}\hat{S}(\xi))^2|0\rangle = \frac{e^{-2r}}{4}, \\ \langle\Delta\hat{p}^2\rangle &= {}_\xi\langle 0|\hat{p}^2|0\rangle_\xi = \langle 0|(\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{p}\hat{S}(\xi))^2|0\rangle = \frac{e^{2r}}{4}, \end{aligned} \tag{A.32}$$

となることが分かる．これらは，ケナード・ロバートソンの不等式 (2.86) の下限 (A.20) を達成している．そして $r > 0$ の場合は，$\hat{x}$ の分散は真空の場合より e^{-2r} だけ小さくなり，$\hat{p}$ の分散は e^{2r} だけ大きくなっている．図 A.2 にスクイズド状態の模式図を示す．一般に，ロバートソンの不確定性関係を満たしながら，ある物理量の分散（量子ゆらぎ）を小さくすることを，スクイジングと呼ぶ．

A.1.3　ウィグナー関数

電磁場の状態を準古典的な相空間上で表示する方法として，**ウィグナー関数（Wigner function）**を考えよう．これは電磁場の状態を可視化するために有用な表示である．交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = \mathrm{i}/2$ を満たす直交位相振幅を考える（このような交換関係さえ満たしていれば，以下の議論は電磁場に限らずに適用できる）．$\hat{x}$ と $\hat{p}$ の固有値 x，p の固有状態をそれぞれ，$\hat{x}|x\rangle_x = x|x\rangle_x$，$\hat{p}|p\rangle_p = p|p\rangle_p$ $(= (\pi)^{-1/2}\int dx e^{2\mathrm{i}xp}|x\rangle_x)$ と書く．このとき，ウィグナー関数は

$$W(x,p) := \frac{2}{\pi}\int {}_x\langle x+y|\hat{\rho}|x-y\rangle_x e^{-4\mathrm{i}yp}dy \tag{A.33}$$

と定義される．これは負の値もとりうるが，以下のように確率分布に似た性質ももつ:

$$\int dpW(x,p) = {}_x\langle x|\hat{\rho}|x\rangle_x, \quad \int dxW(x,p) = {}_p\langle p|\hat{\rho}|p\rangle_p, \quad \int dxdpW(x,p) = 1. \quad \text{(A.34)}$$

そのため，ウィグナー関数は疑似確率分布（quasi-probability distribution）と呼ばれる．ウィグナー関数を p に関してフーリエ変換すると

$$ {}_x\langle x+y|\hat{\rho}|x-y\rangle_x = \int W(x,p)e^{4iyp}dp \quad \text{(A.35)}$$

となり，$\hat{\rho}$ の $\hat{x}$ に関する行列表示が得られる．すなわち，ウィグナー関数はもとの密度演算子についての完全な情報をもっている．また，密度演算子に $\hat{x}$ や $\hat{p}$ をかける演算は，ウィグナー関数で書くと次のようになる:

$$\begin{aligned} \hat{x}\hat{\rho} &\Leftrightarrow \left(x + \frac{i}{4}\frac{\partial}{\partial p}\right)W(x,p), \quad \hat{\rho}\hat{x} \Leftrightarrow \left(x - \frac{i}{4}\frac{\partial}{\partial p}\right)W(x,p), \\ \hat{p}\hat{\rho} &\Leftrightarrow \left(p - \frac{i}{4}\frac{\partial}{\partial x}\right)W(x,p), \quad \hat{\rho}\hat{p} \Leftrightarrow \left(p + \frac{i}{4}\frac{\partial}{\partial x}\right)W(x,p). \end{aligned} \quad \text{(A.36)}$$

具体例として，$\alpha_0 := x_0 + ip_0$ に対応するコヒーレント状態 $|\alpha_0\rangle$ のウィグナー関数を計算すると，

$$W(x,p) = \frac{2}{\pi}\exp\left(-2[(x-x_0)^2 + (p-p_0)^2]\right) \quad \text{(A.37)}$$

となる．これは，(x_0, p_0) を中心として分散が 1/4 の等方的なガウス分布であり，コヒーレント状態の性質と整合している．一般に，ウィグナー関数がガウス分布になるような密度演算子を**ガウス状態**（**Gaussian state**）と呼ぶ．たとえば，スクイズされた真空もガウス状態の一例である．

ここで，古典確率論におけるモーメントとキュムラントについて簡単に復習しておこう．一般の確率変数 $(x_1, x_2, \cdots, x_d)$ と確率分布 $p(x_1, x_2, \cdots, x_d)$ を考える．その**モーメント母関数**（**moment generating function**）は，$(t_1, t_2, \cdots, t_d)$ を実ベクトルとして

$$M(t_1, t_2, \cdots, t_d) := \sum_{x_1, x_2, \cdots, x_d} p(x_1, x_2, \cdots, x_d)\exp\left(i\sum_i x_i t_i\right) \quad \text{(A.38)}$$

と定義される．$(x_1, x_2, \cdots, x_d)$ が連続変数のときは，和は積分になる．このとき，

$$\frac{\partial}{\partial(it_{i_1})}\cdots\frac{\partial}{\partial(it_{i_n})}M(t_1, \cdots, t_d)\Big|_{(t_1,\cdots,t_d)=(0,\cdots,0)} = \sum_{x_1,\cdots,x_d} p(x_1, \cdots, x_d)x_{i_1}\cdots x_{i_n} \quad \text{(A.39)}$$

のように定義される量が n 次のモーメントである．たとえば x が一変数の場合，n 次のモーメントは $\mu_n := \sum_x p(x)x^n$ で与えられる．また，**キュムラント母関数**（**cumulant generating function**）を

$$K(t_1, t_2, \cdots, t_d) := \ln M(t_1, t_2, \cdots, t_d) \quad \text{(A.40)}$$

と定義する．このとき，

$$\frac{\partial}{\partial(it_{i_1})}\cdots\frac{\partial}{\partial(it_{i_n})}K(t_1, \cdots, t_d)\Big|_{(t_1,\cdots,t_d)=(0,\cdots,0)} \quad \text{(A.41)}$$

のように定義される量が n 次のキュムラントである．たとえば x が一変数の場合，n 次キュ

ムラントを κ_n とすると，$\kappa_1 = \mu_1$，$\kappa_2 = \mu_2 - \mu_1^2$（すなわち分散），$\kappa_3 = \mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3$，$\kappa_4 = \mu_4 - 4\mu_3\mu_1 - 3\mu_2^2 + 12\mu_2\mu_1^2 - 6\mu_1^4$，$\cdots$，となる．なお，多次元ガウス分布のキュムラントは，三次以上がすべてゼロになる．

さて，ウィグナー関数の議論に戻ろう．ウィグナー関数から計算される $x^m p^n$ のモーメントは，$\hat{x}^m \hat{p}^n$ の対称化モーメント $\mathrm{tr}[\{\hat{x}^m \hat{p}^n\}_{\mathrm{sym}} \hat{\rho}]$ に等しいことが知られている:

$$\mathrm{tr}[\{\hat{x}^m \hat{p}^n\}_{\mathrm{sym}} \hat{\rho}] = \int dx dp W(x,p) x^m p^n. \tag{A.42}$$

ここで $\{\hat{x}^m \hat{p}^n\}_{\mathrm{sym}}$ は $\hat{x}^m \hat{p}^n$ をあらゆる順序に関して並べ替えた平均であり，たとえば

$$\begin{aligned} \{\hat{x}\hat{p}\}_{\mathrm{sym}} &:= \frac{\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}}{2}, \\ \{\hat{x}^2\hat{p}\}_{\mathrm{sym}} &:= \frac{\hat{x}^2\hat{p} + \hat{x}\hat{p}\hat{x} + \hat{p}\hat{x}^2}{3} \end{aligned} \tag{A.43}$$

などである．同様に，ウィグナー関数から（通常の確率分布のときと同様に）計算されるキュムラントは，$\hat{x}$ と $\hat{p}$ の積の順序について対称化されたキュムラントである．したがって，密度演算子がガウス状態ならば，三次以上の対称化キュムラントはゼロになる．

A.2 光と原子の相互作用

本節では，光と原子の相互作用について議論する．

A.2.1 相互作用ハミルトニアン

まず相互作用ハミルトニアンの一般的な形について考えよう．有限体積 V の三次元空間内に電磁場があり，そこに中性原子が置かれているとする．本節では，原子の特定の二つのエネルギー準位の間の遷移だけを考えることにする．すなわち，原子を二準位原子として扱い，その状態は二次元のヒルベルト空間で記述されるとする．エネルギーの低い状態を $|0\rangle$，高い状態を $|1\rangle$ とする．これらは完全性条件 $\sum_{i=0,1} |i\rangle\langle i| = \hat{I}_{\mathrm{S}}$（$\hat{I}_{\mathrm{S}}$ は原子のヒルベルト空間の単位ベクトル）を満たす．$\hbar\omega_0$ を二つのエネルギー準位の差とする．すなわち ω_0 が共鳴周波数である．

まず原子の自由ハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\mathrm{S}} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \hat{\sigma}_z \tag{A.44}$$

と書ける．ここで

$$\hat{\sigma}_z := |1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0| \tag{A.45}$$

である．

簡単のため，電子は 1 個の場合を考える．電磁場と原子の相互作用の主要項は，電子の電気双極子モーメントに由来する**双極子相互作用**である:

$$\hat{H}_{\mathrm{int}} = -e\vec{\hat{r}} \cdot \vec{\hat{E}}. \tag{A.46}$$

ここで e は素電荷，$\vec{\hat{r}}$ は原子中の電子の位置演算子，$\vec{\hat{E}}$ は電場演算子 (A.3) で $\vec{r} = \vec{0}$ とおいたものである．$\vec{\hat{r}}$ と $\vec{\hat{E}}$ はともに，各成分が演算子であるような三次元ベクトルである．

このとき，

$$e\vec{\hat{r}} = \sum_{i,j=0,1} |i\rangle\langle i|e\vec{\hat{r}}|j\rangle\langle j| \tag{A.47}$$

と書ける．また，原子のパリティ対称性より，空間反転演算子を $\hat{P}$ とすると

$$\hat{P}\vec{\hat{r}}\hat{P} = -\vec{\hat{r}} \tag{A.48}$$

が成立する．さらに，エネルギー固有状態はパリティ変換に対して不変である:

$$\hat{P}|0\rangle = c_0|0\rangle, \quad \hat{P}|1\rangle = c_1|1\rangle. \tag{A.49}$$

ここで c_0 と c_1 は絶対値が 1 の複素数だが，$\hat{P}^2 = \hat{I}_{\mathrm{S}}$ に注意すると，$+1$ または -1 の値をとることが分かる．以上より，$\vec{\hat{r}}$ の対角成分はゼロであることが分かる:

$$\langle 0|\vec{\hat{r}}|0\rangle = \langle 1|\vec{\hat{r}}|1\rangle = 0. \tag{A.50}$$

また，固有状態の位相因子を適当に選ぶことで，一般性を失うことなく $\langle 1|\vec{\hat{r}}|0\rangle = \langle 0|\vec{\hat{r}}|1\rangle$ とでき，かつ，この値は実数にとれる．そこで，

$$\vec{p} := e\langle 1|\vec{\hat{r}}|0\rangle = e\langle 0|\vec{\hat{r}}|1\rangle \tag{A.51}$$

とおくと，$\vec{p}$ は三次元実ベクトルである．これは双極子モーメント（分極ベクトル）と呼ばれる．以上により，

$$e\vec{\hat{r}} = \vec{p}\hat{\sigma}_x \tag{A.52}$$

と書くことができる．ここで

$$\hat{\sigma}_x := |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \tag{A.53}$$

とおいた．したがって，相互作用ハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\mathrm{int}} = \hat{\sigma}_x(\hat{B} + \hat{B}^\dagger) \tag{A.54}$$

となる．ここで

$$\hat{B} := -\mathrm{i}\vec{p}\cdot\sum_{\vec{k},\lambda}\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}}\vec{e}(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k},\lambda) \tag{A.55}$$

とおいた．

A.2.2 単一モードの電磁場中の原子

次に，周波数 ω_{c} の単一モードの電磁場中に中性原子がある場合を考えよう．このような状況は，完全なキャビティ内に原子を置くことで実現できる．ここで**キャビティ**（**cavity**）とは，図 A.3 に示すような，二枚の鏡を向い合せてその中に光を閉じ込めておく装置である．キャビティが完全であるとは，鏡の反射率が 1 で，光が外に漏れ出さないことを意味する．このような場合，キャビティ内の電磁場は定在波のみになり，その周波数はとびとびの値をとる．その間隔が十分に離れていれば，一つの周波数 ω_{c} だけに注目して，キャビティ内の電磁場は単一モードとみなすことができる．このような，キャビティ内の電磁場と原子の相互作用を研究する分野を**キャビティ QED**（**cavity quantum**

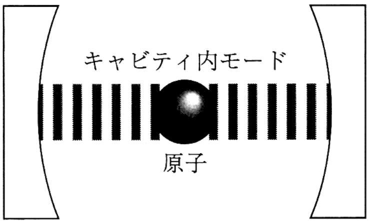


図 A.3　キャビティ内原子の模式図．反射率が 1 の完全な鏡 2 枚に挟まれた電磁場のモードは離散的になる．そのエネルギー間隔が十分に大きければ，原子はその中の一つのモードとだけ相互作用するとみなすことができる．

electrodynamics）という．

上記のような設定におけるハミルトニアンは，これまでの議論において電磁場を単一のモードに置き換えることで得られる．そのモードの消滅演算子を $\hat{a}$ として，

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z + \hbar\omega_{\mathrm{c}}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar g\hat{\sigma}_x(\hat{a}+\hat{a}^\dagger) \tag{A.56}$$

が全系のハミルトニアンである．ここで g は相互作用の大きさを表す定数である．なお，原子の周波数とキャビティの周波数の差 $\delta := \omega_0 - \omega_{\mathrm{c}}$ を**離調**（**detuning**）という．ここで

$$\sigma_+ := |1\rangle\langle 0|, \quad \sigma_- := |0\rangle\langle 1| \tag{A.57}$$

とおくと，相互作用ハミルトニアンは

$$\hbar g(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a}+\hat{a}^\dagger) \tag{A.58}$$

と書ける．

相互作用ハミルトニアン (A.58) において，$\hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger$ と $\hat{\sigma}_-\hat{a}$ を無視する近似を行うことが多い．これは**回転波近似**と呼ばれ，以下のようにして正当化することができる．(A.58) を原子と光の自由ハミルトニアンに関して相互作用表示すると，$\hbar g(\hat{\sigma}_+ e^{\mathrm{i}\omega_0 t} + \hat{\sigma}_- e^{-\mathrm{i}\omega_0 t})$ $(\hat{a}e^{-\mathrm{i}\omega_{\mathrm{c}} t} + \hat{a}^\dagger e^{\mathrm{i}\omega_{\mathrm{c}} t})$ と書ける．ここで $\hat{\sigma}_+\hat{a}$ と $\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger$ の周波数は δ であるが，$\hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger$ と $\hat{\sigma}_-\hat{a}$ の周波数は $\omega_0+\omega_{\mathrm{c}}$ である．したがって，$|\delta| \ll \omega_0+\omega_{\mathrm{c}}$ が成り立っているときに $(\omega_0+\omega_{\mathrm{c}})^{-1}$ より十分長い時間スケールで系を見れば，$\hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger$ と $\hat{\sigma}_-\hat{a}$ の項は激しく振動するので平均化されてゼロになると考えられる．このような議論は，4.3 節で議論した回転波近似と本質的に同じである．このような回転波近似のもとで，全体のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z + \hbar\omega_{\mathrm{c}}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar g(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger) \tag{A.59}$$

となる．これを，**ジェインズ・カミングス・モデル**（**Jaynes-Cummings model**）という．

ジェインズ・カミングス・モデル (A.59) は厳密に対角化することができる*3)．固有値は $n = 0, 1, \cdots$ と $\pm$ でラベルされ，

*3)　詳細は [8] などを参照．

$$E_{n,\pm} = \hbar\omega_{\mathrm{c}}\left(n+\frac{1}{2}\right) \pm \frac{\hbar}{2}\Delta_n, \tag{A.60}$$

ここで

$$\Delta_n := \sqrt{4g^2(n+1)+\delta^2}, \tag{A.61}$$

である．対応する固有ベクトルは

$$\begin{aligned} |E_{n,+}\rangle &= \sin\theta_n|1\rangle|n\rangle + \cos\theta_n|0\rangle|n+1\rangle, \\ |E_{n,-}\rangle &= \cos\theta_n|1\rangle|n\rangle - \sin\theta_n|0\rangle|n+1\rangle, \end{aligned} \tag{A.62}$$

ここで

$$\sin\theta_n = \frac{2g\sqrt{n+1}}{\sqrt{(\Delta_n-\delta)^2+4g^2(n+1)}}, \quad \cos\theta_n = \frac{\Delta_n-\delta}{\sqrt{(\Delta_n-\delta)^2+4g^2(n+1)}} \tag{A.63}$$

である．

ここで，離調 δ の大きい極限を考える．より正確には，$|g/\delta| \ll 1$ を微小パラメータとして摂動論を用いる．このとき，固有値の摂動は

$$\begin{aligned} E_{n,\pm} &= \hbar\omega_{\mathrm{c}}\left(n+\frac{1}{2}\right) \pm \frac{\hbar}{2}\delta\sqrt{1+\frac{4g^2}{\delta^2}(n+1)} \\ &\simeq \hbar\omega_{\mathrm{c}}\left(n+\frac{1}{2}\right) \pm \frac{\hbar}{2}\delta \pm \frac{\hbar g^2}{\delta}(n+1) \\ &= \pm\frac{\hbar}{2}\omega_0 + \hbar\omega_{\mathrm{c}}\left(n+\frac{1\mp 1}{2}\right) \pm \frac{\hbar g^2}{\delta}(n+1) \end{aligned} \tag{A.64}$$

で，固有状態の摂動は

$$\sin\theta_n \simeq 1, \quad \cos\theta_n \simeq \frac{g}{\delta}\sqrt{n+1} \tag{A.65}$$

で与えられる．ここで原子と光の自由ハミルトニアンに関して相互作用表示を考える．相互作用表示での $|E_{n,\pm}\rangle$ の時間発展は，上記の摂動の範囲内で

$$\begin{aligned} |E^{\mathrm{I}}_{n,+}(t)\rangle &= e^{-\mathrm{i}g^2(n+1)t/\delta}\left(|1\rangle|n\rangle + e^{-\mathrm{i}\delta t}\frac{g\sqrt{n+1}}{\delta}|0\rangle|n+1\rangle\right), \\ |E^{\mathrm{I}}_{n,-}(t)\rangle &= e^{\mathrm{i}g^2(n+1)t/\delta}\left(e^{\mathrm{i}\delta t}\frac{g\sqrt{n+1}}{\delta}|1\rangle|n\rangle - |0\rangle|n+1\rangle\right) \end{aligned} \tag{A.66}$$

となる．ここで $|E^{\mathrm{I}}_{n,\pm}(t)\rangle\langle E^{\mathrm{I}}_{n,\pm}(t)|$ を考えると，非対角項に位相因子 $e^{\pm\mathrm{i}\delta t}$ がかかる．これは激しく振動するので，相互作用の時間スケール g^{-1} では平均化されてゼロになるとする（これは回転波近似の一種である）．さらに，対角項のうち $(g/\delta)^2$ に比例する項を無視する．以上の近似の結果，

$$\begin{aligned} |E^{\mathrm{I}}_{n,+}(t)\rangle\langle E^{\mathrm{I}}_{n,+}(t)| &= |1\rangle|n\rangle\langle 1|\langle n|, \\ |E^{\mathrm{I}}_{n,-}(t)\rangle\langle E^{\mathrm{I}}_{n,-}(t)| &= |0\rangle|n+1\rangle\langle 0|\langle n+1| \end{aligned} \tag{A.67}$$

が得られる．したがって，相互作用表示の相互作用ハミルトニアンは，

$$\sum_{i=\pm} E_{n,i}|E^{\mathrm{I}}_{n,i}(t)\rangle\langle E^{\mathrm{I}}_{n,i}(t)| = \frac{\hbar g^2}{\delta}\left(\frac{\hat{\sigma}_z+\hat{I}_{\mathrm{S}}}{2} + \hat{\sigma}_z\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) \tag{A.68}$$

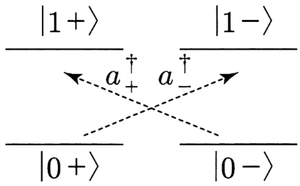


図 A.4　基底状態・励起状態がともに縮退した原子と，偏光自由度のある光子の相互作用の模式図.

と近似できることが分かる．ここで $\hat{I}_{\mathrm{S}}$ は原子の単位演算子である．シュレーディンガー表示に戻り，$\hat{I}_{\mathrm{S}}$ に比例する項を除くと，離調の大きな極限での原子と光のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2}\left(\omega_0 + \frac{g^2}{\delta}\right)\hat{\sigma}_z + \hbar\left(\omega_{\mathrm{c}} + \frac{g^2}{\delta}\hat{\sigma}_z\right)\hat{a}^\dagger\hat{a} \qquad \text{(A.69)}$$

と近似できることが分かった．ここで，相互作用が $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ と $\hat{\sigma}_z$ の積で書かれることが重要である．すなわち，離調が大きい極限では，原子は光子を吸収・放出してエネルギーを変化させることはなく，原子の準位間の相対位相のみが光子数に応じて変化する．(A.69) から，$\hat{\sigma}_z$ および $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ は，$\hat{H}$ と可換で，保存量であることが分かる．なお，$\hat{\sigma}_z$ が保存量であるため，原子の初期状態が基底状態 $|0\rangle$ ならば，ずっとその状態に留まり続ける．そこで，このような状況に制限した相互作用ハミルトニアン (A.68) は $-(\hbar g^2/\delta)|0\rangle\langle 0|\hat{a}^\dagger\hat{a}$ と書くこともできる．

次に，電磁場の周波数は ω_0 のみであるが，偏光自由度が重要な役割を果たす場合を考えよう．すなわち，電磁場のモードが円偏光 + と − の二つある場合を考える．図 A.4 のように，原子の基底状態（$|0+\rangle$，$|0-\rangle$）と第一励起状態（$|1+\rangle$，$|1-\rangle$）はともに二重に縮退しているとする．ここで $|0\pm\rangle$ 状態は $\mp$ 偏光の光子を吸収して $|1\mp\rangle$ 状態に遷移し，$|1\mp\rangle$ 状態は $\mp$ 偏光の光子を放出して $|0\pm\rangle$ 状態になる（複号同順）．それ以外の遷移は起きないとする*4)．ここで離調が大きい極限を考え，原子の状態は $|0\pm\rangle$ が張る空間から出ないとすると，相互作用ハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\mathrm{int}} = -\frac{\hbar g^2}{\delta}\left(|0-\rangle\langle 0-|\hat{a}_+^\dagger\hat{a}_+ + |0+\rangle\langle 0+|\hat{a}_-^\dagger\hat{a}_-\right) \qquad \text{(A.70)}$$

と書ける．ここで，基底状態のスピン演算子の z 成分を

$$s_z := \frac{\hbar}{2}(|0+\rangle\langle 0+| - |0-\rangle\langle 0-|) \qquad \text{(A.71)}$$

とすると，$(|0+\rangle\langle 0+| + |0-\rangle\langle 0-|)(\hat{a}_+^\dagger\hat{a}_+ + \hat{a}_-^\dagger\hat{a}_-)$ に比例する項を除いて

$$\hat{H}_{\mathrm{int}} = -\frac{2g^2}{\delta}\hat{s}_z\hat{J}_z \qquad \text{(A.72)}$$

となる．ここで $\hat{J}_z$ は 2.4.4 節の (2.184) で導入した偏光のシュウィンガー演算子である．さらに原子が多数あるとして，原子スピンの演算子の和をとり，$\alpha := -2g^2/(\delta\hbar)$ とする

*4)　これは**選択則**（**selection rule**）の帰結である．詳しくは [1] などを参照.

と，2.4.4 節で議論したファラデー回転の相互作用ハミルトニアン (2.174) が得られる．

A.2.3 ロスのあるキャビティ中の原子

次に，キャビティが完全ではないときに，その中に共鳴周波数 $\omega_{\rm c}$ の二準位原子がある状況を考えよう．このときは，原子と相互作用する電磁場は単一モードではなくなる．なお以下では，簡単のため電磁場の偏光自由度は無視する．

キャビティの周波数を $\omega_{\rm c}$ とする．キャビティが完全でない場合，キャビティ内の電磁場はキャビティ外の電磁場と相互作用している．この相互作用の強さを特徴づけるパラメータを $\kappa > 0$ とする．κ^{-1} はキャビティの **Q 値**と呼ばれ，キャビティ内に光子を保持しておけるおよその時間に対応する．キャビティ外の電磁場は無限に広がった一次元空間にあるとする．キャビティ内のモードの消滅演算子を $\hat{a}$，キャビティ外の周波数 ω のモードの消滅演算子を $\hat{b}(\omega)$ とすると，全系のハミルトニアンは

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\rm tot} :=& \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z + \hbar g(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger) + \hbar\omega_{\rm c}\hat{a}^\dagger\hat{a} \\ &+ {\rm i}\hbar\sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega(\hat{a}^\dagger\hat{b}(\omega) - \hat{a}\hat{b}^\dagger(\omega)) + \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\hbar\omega\hat{b}^\dagger(\omega)\hat{b}(\omega).\end{aligned} \tag{A.73}$$

と書ける．ここで，右辺の ω の積分範囲の下端を $-\infty$ にとっているのは，7.1.4 節で議論した負のエネルギーを付け加える近似に対応する．これは ω_0 と $\omega_{\rm c}$ が十分大きい時に正当化される．

ここで，新たな添え字 μ でラベルされた消滅演算子 $\hat{b}'(\mu)$ を

$$\hat{b}'(\mu) := -{\rm i}\alpha(\mu)\hat{a} + \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\beta(\mu,\omega)\hat{b}(\omega) \tag{A.74}$$

と定義する．ここで

$$\alpha(\mu) := \frac{\sqrt{\kappa/2\pi}}{(\mu - \omega_{\rm c}) + {\rm i}\kappa/2} \tag{A.75}$$

$$\beta(\mu,\omega) := \frac{\kappa/2\pi}{(\mu - \omega_0 + {\rm i}\kappa/2)(\mu - \omega + {\rm i}\varepsilon)} + \delta(\mu - \omega) \tag{A.76}$$

であり，$\varepsilon \to +0$ は無限小の正数である．このとき，

$$[\hat{b}'(\mu), \hat{b}'^\dagger(\mu')] = \delta(\mu - \mu') \tag{A.77}$$

が成り立つ．また，

$$\hat{a} = {\rm i}\int_{-\infty}^{+\infty} d\mu\alpha(\mu)^*\hat{b}'(\mu),\ \hat{b}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu\beta(\omega,\mu)^*\hat{b}'(\mu) \tag{A.78}$$

が成り立つことに注意すると，全系のハミルトニアン (A.73) を

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\rm tot} =& \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z + {\rm i}\hbar\int_{-\infty}^{+\infty} d\mu[\kappa(\mu)\hat{\sigma}_+\hat{b}'(\mu) - \kappa(\mu)^*\hat{\sigma}_-\hat{b}'^\dagger(\mu)] \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\hat{b}'^\dagger(\omega)\hat{b}'(\omega)\end{aligned} \tag{A.79}$$

と書き直すことができる[*5]．ここで

*5) 詳しくは [75] などを参照．

$$\kappa(\mu) := g\alpha(\mu)^* = \frac{g\sqrt{\kappa/2\pi}}{\mu - \omega_{\mathrm{c}} - \mathrm{i}\kappa/2} \tag{A.80}$$

とおいた．すなわち，原子がロスのあるキャビティ内の単一モードの電磁場と相互作用しているのは，連続自由度の電磁場と**ローレンツ型の相互作用**をしているのと等価である．

付録 B
古典確率過程と古典制御理論

この付録では，古典的な確率過程のダイナミクスと，それに対する軌道推定や最適制御の理論について解説する．なお，本章ではすべて連続時間のダイナミクスを考える．

B.1　確率過程入門

古典確率過程とは，古典的な変数が確率的に時間発展していくプロセスを意味する．本節ではマルコフ過程について議論する．マルコフ過程とは，ある時刻 t の確率分布が，その一瞬前の $t-dt$ における確率分布だけに依存して決まり，それ以前のダイナミクスには依存しないプロセスを意味する．とくに，ウィーナー過程と伊藤公式について詳しく解説する．

B.1.1　離散変数の確率過程

まず，離散変数 n で表される有限個の状態の間を遷移する確率過程を考える．時刻 t における状態 n の実現確率を $P(n;t)$ とする．また，状態 n から状態 $m(\neq n)$ への，時刻 t における**遷移レート**（**transition rate**）を $P(m|n;t)$ と書く．このとき，時刻 t から $t+\Delta t$ の間に状態 n が他の状態 m へ遷移する確率は $P(m|n;t)=P(n;t)\Delta t$ で与えられる．したがって，確率分布の時間変化は

$$P(n;t+\Delta t)=P(n;t)+\sum_{m(\neq n)}\left[P(n|m;t)P(m;t)\Delta t-P(m|n;t)P(n;t)\Delta t\right] \quad \text{(B.1)}$$

となる．右辺のシグマの中の第一項は他の状態から n へと遷移する確率，第二項は n から他の状態へと遷移する確率である．なお，$\sum_{m(\neq n)}P(m|n;t)$ は状態 n のエスケープ・レート（escape rate）と呼ばれる．$\Delta t\to 0$ の極限をとって微分方程式の形で書くと，確率分布の従う時間発展方程式は

$$\frac{\partial P(n;t)}{\partial t}=\sum_{m(\neq n)}\left[P(n|m;t)P(m;t)-P(m|n;t)P(n;t)\right] \quad \text{(B.2)}$$

で与えられる．これは**古典マスター方程式**（**classical master equation**）と呼ばれる．遷移レートが時刻 t に依存しない場合を考える．このとき，(B.2) の右辺を 0 にする，す

なわち

$$\sum_m [P(n|m)P_{\rm ss}(m) - P(m|n)P_{\rm ss}(n)] = 0 \tag{B.3}$$

を満たす $P_{\rm ss}(n)$ は定常分布と呼ばれる．

系が逆温度 $\beta := (k_{\rm B}T)^{-1}$ の熱浴と接触している状況を考えよう．状態 n のエネルギーを E_n とする．**詳細つり合い条件**とは

$$\frac{P(n|m)}{P(m|n)} = e^{-\beta(E_n - E_m)} \tag{B.4}$$

がすべての (n, m) について成り立つことである．このとき，カノニカル分布は (B.3) を満たす定常状態になる:

$$P_{\rm ss}(n) = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z}, \quad Z := \sum_n e^{-\beta E_n}. \tag{B.5}$$

ここで Z は分配関数であり，自由エネルギー F は $F := -\beta^{-1} \ln Z$ で与えられる．

B.1.2 確率微分方程式と伊藤積分

次に，実数値をとる連続変数のダイナミクスを考えよう．そのための準備として，**ウィーナー過程（Wiener process）**という概念を導入する．これは，物理的には，ブラウン運動する粒子に加わる揺動力（の時間積分）をモデル化したものである．

実数値をとる変数 W の，時刻 $t = 0$ からの確率過程を考える．$W(t)$ が以下の性質を満たすとき，ウィーナー過程であるという:

- 確率 1 で $W(t)$ は $t \geq 0$ において連続である*1)．
- $\Delta W(t', t) := W(t') - W(t)$ は，アンサンブル平均（期待値）が 0，分散が $|t' - t|$ のガウス分布に従う:

$$P[\Delta W(t', t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi|t' - t|}} \exp\left(-\frac{\Delta W(t', t)^2}{2|t' - t|}\right). \tag{B.6}$$

- $t_3 > t_2 > t_1 > t_0$ のとき，$\Delta W(t_3, t_2)$ と $\Delta W(t_1, t_0)$ は独立であり，時間相関はない．

この最後の条件は，ウィーナー過程がマルコフ的であることを示している*2)．なお，本書では，分散が $r|t - t'|$（r は正の定数）のときもウィーナー過程と呼ぶ．

また，$W(t)$ は確率 1 で連続であるにもかかわらず，至るところで確率 1 で微分不可能である．これは以下のようにして示すことができる．$K > 0$ を任意の正の実数とする．また，$\Delta t > 0$ に対して $\Delta W(t) := W(t + \Delta t) - W(t)$ とする．これはアンサンブル平均が 0，分散が Δt のガウス分布である．$|\Delta W(t)| > K\Delta t$ となる確率 $P[|\Delta W(t)| > K\Delta t]$ は，

$$P[|\Delta W(t)| > K\Delta t] = 2\int_{K\Delta t}^{+\infty} d[\Delta W(t)] \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left(-\frac{\Delta W(t)^2}{2\Delta t}\right) \tag{B.7}$$

---

*1) すなわち，不連続な経路が実現する確率測度はゼロである．ここで確率測度がゼロであることは，そのような経路が存在しないことを意味しない．たとえば，実数の [0, 1] 区間の一様測度を考えると，有理数の測度はゼロであるが，それは有理数が存在しないことを意味しない．測度論については [30] にコンパクトにまとまっている．

*2) 本書では，数学的に厳密なマルコフ性の定義には立ち入らない．

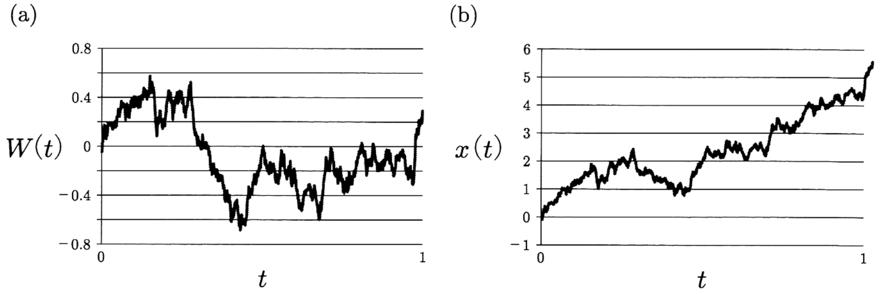


図 B.1 確率微分方程式の数値シミュレーション．$t = 0$ から $t = 1$ までを示した．(a) ウィーナー過程 $W(t)$ の一例．(b) それによって駆動される確率過程 $dx(t) = 5dt + 2dW(t)$ の解 $x(t)$．

と書ける．$w := \Delta W(t)/\sqrt{\Delta t}$ と変数変換すると，

$$P[|\Delta W(t)| > K\Delta t] = 2\int_{K\sqrt{\Delta t}}^{+\infty} dw \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) \tag{B.8}$$

となり，これは $\Delta t \to 0$ の極限で 1 に収束する．すなわち，任意の $K > 0$ に対して確率 1 で

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta W(t)|}{\Delta t} > K \tag{B.9}$$

となり，$W(t)$ は微分不可能である．直感的には，$W(t)$ は非常に「ギザギザした」関数である（図 B.1 (a) に $W(t)$ の一例を示す）．このことから，$W(t)$ を形式的に微分した量 $\xi(t) := dW(t)/dt$ は，デルタ関数的な特異性をもつことが推測される．この点は B.1.7 節で議論する．本書では主に，このような特異性を避けるために，$dW(t)$ を dt でわることなく，無限小増分のままで扱うことにする．これを**ウィーナー増分**（**Wiener increment**）と呼ぶ．

さて次に，ウィーナー過程によって駆動される確率過程について考えよう．このような確率過程は**ガウス過程**（**Gaussian process**）と呼ばれる．実数値をとる変数 $x \in \mathbb{R}$ の，時刻 $t = 0$ から $t = \tau$ までの確率過程を考える．時間を微小時間間隔 Δt に分割して，$t_n := n\Delta t$，$x_n := x(t_n)$，$\Delta x_n := x_{n+1} - x_n$ とする．時間発展が

$$\Delta x_n := f(x_n; t_n)\Delta t + g(x_n; t_n)\Delta W_n \tag{B.10}$$

で与えられるとする．ここで $f(x;t)$，$g(x;t)$ は，x と t の必要なだけ微分可能な関数とする．また，$\Delta W_n := W(t_{n+1}) - W(t_n)$ はウィーナー増分と呼ばれ，アンサンブル平均が 0，分散が Δt のガウス分布に従う：

$$P(\Delta W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left(-\frac{\Delta W_n^2}{2\Delta t}\right). \tag{B.11}$$

$N \to \infty$，$\Delta t \to 0$ の極限をとって，(B.10) を形式的に微分形で書くと

$$dx(t) = f(x(t); t)dt + g(x(t); t) \cdot dW(t) \tag{B.12}$$

となる．これは**伊藤型の確率微分方程式**と呼ばれる．これは，$W(t)$ の経路が確率的に決まるごとに $x(t)$ の経路を決める方程式である．ここで伊藤型とは，差分化した (B.10) における ΔW_n の係数が，時刻 t_n における値 $g(x_n;t_n)$ で定義されていることを意味している．このことを明示するために，(B.12) の右辺第二項の $\cdot$ を書いた．このような積の取り方は**伊藤型の積**（**Itô product**）と呼ばれる．一方で通常の微分方程式の場合は，x_n の代わりに時刻 t_n と t_{n+1} の間の任意の時刻における $x(t)$ を用いても，極限として定義される微分方程式の解には影響がない．しかし，確率微分方程式の場合は，時刻の取り方によって解が変わりうる．その理由は，ウィーナー過程 $W(t)$ がなめらかでなく，至るところ微分不可能な関数になっていることによる．なお，図 B.1 (b) に確率微分方程式の解の軌道の一例を示した．

さて，$F(x;t)$ を必要なだけ微分可能な x と t の関数とする．これに対して，次のような確率積分を定義する:

$$\int_0^\tau F(x(t);t)\cdot dW(t) := \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N-1} F(x_n;t_n)\Delta W_n. \tag{B.13}$$

これは**伊藤積分**（**Itô integral**）と呼ばれる．ここで，確率微分方程式の定義のときのように，右辺において ΔW_n の係数である $F(x_n;t_n)$ が時刻 t_n における値であることが重要である．左辺の $\cdot$ は，このことを明示するために付けた．すなわち，伊藤積分は伊藤積によって定義されている．通常の十分なめらかな関数のリーマン積分の場合は，t_n と t_{n+1} の間の任意の時刻の値を使っても，極限として定義される積分の値は変化しない．しかし，確率積分の場合は，時刻の取り方によって積分の値が変わりうる．なお，伊藤積の定義を無限小増分を使って形式的に書くと

$$F(x(t);t)\cdot dW(t) := F(x(t);t)\,[W(t+dt)-W(t)] \tag{B.14}$$

となる．

さて，差分方程式 (B.10) を形式的に解くと

$$x_N = \sum_{n=0}^{N-1}\left[f(x_n;t_n)\Delta t + g(x_n;t_n)\Delta W_n\right] + x_0 \tag{B.15}$$

となる．ここで $N\to\infty$，$\Delta t\to 0$ の極限をとると，(B.15) は

$$x(\tau) = \int_0^\tau \left[f(x(t);t)dt + g(x(t);t)\cdot dW(t)\right] + x(0) \tag{B.16}$$

と書くことができる．ここで右辺第一項は通常のリーマン積分，第二項は (B.13) で定義された伊藤積分である．なお，(B.12) や (B.16) を，引数を省略して簡略に

$$dx = f dt + g\cdot dW, \tag{B.17}$$

$$x(\tau) = \int_0^\tau \left[f dt + g\cdot dW\right] + x(0) \tag{B.18}$$

などのように書くことも多い．

さて，あらゆる $W(t)$ の経路に関するアンサンブル平均を考えよう．確率変数 A のアンサンブル平均を $\langle A\rangle$ と書く．(B.10) において，ΔW_n は t_n から t_{n+1} までのウィーナー増

分なので，x_n とは独立である．したがって，任意の $F(x;t)$ に対して

$$\langle F(x_n, t_n)\Delta W_n\rangle = \langle F(x_n;t_n)\rangle\langle\Delta W_n\rangle = 0 \tag{B.19}$$

が成り立つ．ここで $F(x_n;t_n)$ の時刻が t_n であることが本質的である．式 (B.10) の表記で書くと

$$\langle F(x(t);t)\cdot dW(t)\rangle = \langle F(x(t);t)\rangle\langle dW(t)\rangle = 0 \tag{B.20}$$

となる．したがって，確率微分方程式 (B.10) の両辺のアンサンブル平均をとると

$$d\langle x(t)\rangle = \langle f(x(t);t)\rangle dt \tag{B.21}$$

となる．とくに $f(x;t) := a(t)x + u(t)$ ($a(t)$ と $u(t)$ は x に依存しない) のとき，(B.21) は

$$d\langle x(t)\rangle = [a(t)\langle x(t)\rangle + u(t)]dt \tag{B.22}$$

となり，$\langle x(t)\rangle$ についての常微分方程式になる．

B.1.3 伊藤公式

$W(t)$ がなめらかな関数でないために，確率微分方程式に対して合成関数の微分則などをそのまま適用することはできない．そのかわりに，以下に議論する計算規則を使うことができる．

$F(x;t)$ を必要なだけ微分可能な x と t の関数とする．$x(t)$ が確率微分方程式 (B.12) の解のとき，$F(x(t);t)$ の t に関する全微分を計算したい．そのために (B.10) のように差分化して考える．ΔW_n の分散が Δt なので，$|\Delta W_n|$ の典型的な大きさは $\sqrt{\Delta t}$ のオーダーであると考えられる．そのため，Δt のオーダーまで展開するには，ΔW_n^2 まで考える必要がある．したがって，

$$\begin{aligned}\Delta F_n &:= F(x_{n+1};t_{n+1}) - F(x_n;t_n)\\ &= \frac{\partial F(x_n;t_n)}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial F(x_n;t_n)}{\partial x}\Delta x_n + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(x_n;t_n)}{\partial x^2}\Delta x_n^2 + o(\Delta t)\\ &= \frac{\partial F(x_n;t_n)}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial F(x_n;t_n)}{\partial x}[f(x_n;t_n)\Delta t + g(x_n;t_n)\Delta W_n]\\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(x_n;t_n)}{\partial x^2}g(x_n;t_n)^2\Delta W_n^2 + o(\Delta t)\end{aligned} \tag{B.23}$$

となる．問題は ΔW_n^2 の項であるが，これは

$$\left\langle \frac{\partial^2 F(x_n;t_n)}{\partial x^2}g(x_n;t_n)^2\Delta W_n^2\right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 F(x_n;t_n)}{\partial x^2}g(x_n;t_n)^2\right\rangle\Delta t \tag{B.24}$$

を満たす．したがって，計算の最後にアンサンブル平均をとるという約束のもとでは，ΔW_n^2 を Δt に置き換えることができる．その結果，

$$\begin{aligned}\Delta F_n = &\left[\frac{\partial F(x_n;t_n)}{\partial t} + \frac{\partial F(x_n;t_n)}{\partial x}f(x_n;t_n) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(x_n;t_n)}{\partial x^2}g(x_n)^2\right]\Delta t\\ &+ \frac{\partial F(x_n;t_n)}{\partial x}g(x_n;t_n)\Delta W_n + o(\Delta t)\end{aligned} \tag{B.25}$$

を得る．$\Delta t \to 0$ として微分形で書くと，

$$dF(x(t);t) = \left[\frac{\partial F(x(t);t)}{\partial t} + \frac{\partial F(x(t);t)}{\partial x}f(x(t);t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(x(t);t)}{\partial x^2}g(x(t);t)^2\right]dt + \frac{\partial F(x(t);t)}{\partial x}g(x(t);t)\cdot dW(t) \tag{B.26}$$

あるいは引数を省略して簡略に

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}f + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}g^2\right]dt + \frac{\partial F}{\partial x}g\cdot dW \tag{B.27}$$

と書ける．これがガウス過程の**伊藤公式**（**Itô formula**）に他ならない．これは通常の合成関数の微分則を，ウィーナー過程を含む場合に拡張したものである．この公式の本質は，dW の二次まで残すように（したがって，dx の二次まで残すように）展開し，dW^2 を dt に置き換えることに他ならない．したがって，伊藤公式は本質的には以下の計算規則であると言える:

$$dW^2 = dt. \tag{B.28}$$

なお，以上の議論では簡単のため，最後にアンサンブル平均をとるという条件のもとで $dW^2 = dt$ とする，という説明をした．しかし実は以下に示すように，アンサンブル平均をとることなく $dW^2 = dt$ という計算を正当化することができる．$g(x;t)$ を x と t について連続な関数とする．このとき，アンサンブル平均をとることなく

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N-1} g(x_n;t_n)\Delta W_n^2 = \int_0^\tau g(x(t);t)dt \tag{B.29}$$

が確率 1 で[*3)]成立する．すなわち，アンサンブル平均をとらなくても，時間積分さえすれば $dW^2 = dt$ という計算は正当化されることになる．これは以下のようにして示すことができる．(B.29) が確率 1 で成り立つことは，

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N-1} g(x_n;t_n)[\Delta W_n^2 - \Delta t] = 0 \tag{B.30}$$

が確率 1 で成立することと等価である．(B.30) の左辺のアンサンブル平均がゼロになることは明らかなので，その分散もゼロになることを示せば十分である[*4)]．$\langle\cdots\rangle$ をアンサンブル平均，$\langle\cdots\rangle_n$ を時刻 t_n までの $x(t)$ の値を決めたときの条件付き平均とすると，

$$\left\langle\left(\sum_{n=0}^{N-1} g(x_n;t_n)[\Delta W_n^2 - \Delta t]\right)^2\right\rangle = \left\langle\left(\sum_{n=0}^{N-1} g(x_n;t_n)^2\langle[\Delta W_n^2 - \Delta t]^2\rangle_n\right)\right\rangle \tag{B.31}$$

となる．ここでガウス分布の性質より $\langle[\Delta W_n^2 - \Delta t]^2\rangle_n = 2\Delta t^2$ が成り立つので，

$$\left\langle\left(\sum_{n=0}^{N-1} g(x_n;t_n)[\Delta W_n^2 - \Delta t]\right)^2\right\rangle = 2\Delta t\left\langle\left(\sum_{n=0}^{N-1} g(x_n;t_n)^2\Delta t\right)\right\rangle \tag{B.32}$$

となる．この右辺は $\Delta t \to 0$ の極限でゼロに収束する．したがって，(B.30) の両辺の差の

---

*3） 厳密には，（概収束ではなく）確率収束の意味で．

*4） すなわち，二次平均収束するならば確率収束する．

分散はゼロなので，確率 1 で両辺は一致することが分かる．

また，積の微分も伊藤公式を用いて計算することができる．$F(x)$，$G(x)$ を必要なだけ微分可能な関数としよう．$x(t)$ が確率微分方程式 (B.12) の解のとき，$F(x(t))G(x(t))$ の t に関する全微分は

$$\begin{aligned} d(FG) =& F\cdot dG + G\cdot dF + dF\cdot dG \\ =& \left(F\frac{dG}{dx}+\frac{dF}{dx}G\right)fdt + \frac{1}{2}\left(F\frac{d^2G}{dx^2}+\frac{d^2F}{dx^2}G+2\frac{dF}{dx}\frac{dG}{dx}\right)g^2dt \\ &+\left(F\frac{dG}{dx}+\frac{dF}{dx}G\right)g\cdot dW \end{aligned} \tag{B.33}$$

となる．一行目の右辺で $dF\cdot dG$ の項を残したことが重要である．

さて，伊藤公式の簡単な応用として，次のような確率微分方程式を解いてみよう:

$$dx = axdt + bx\cdot dW. \tag{B.34}$$

ここで a，b は時間に依存しない定数である．なお，$x(0)>0$ とする．まず $\ln x$ に伊藤公式を適用すると

$$d(\ln x) = (a-b^2/2)dt + bdW \tag{B.35}$$

が成り立つことが分かるので，

$$\ln x(t) = \ln x(0) + (a-b^2/2)t + b\Delta W(t,0) \tag{B.36}$$

が成り立つ．したがって，(B.34) の解として

$$x(t) = x(0)\exp\left((a-b^2/2)t + b\Delta W(t,0)\right) \tag{B.37}$$

を得る．これは (B.34) の形式解である．これによって，ウィーナー過程の値 $\Delta W(t,0)$ が与えられれば，$x(t)$ を計算することができる．なお (B.37) より，$x(0)>0$ なら $x(t)>0$ であることが分かる．

B.1.4 フォッカー・プランク方程式

変数 x が確率微分方程式 (B.12) に従って時間発展しているとき，x の時刻 t における確率分布 $P[x;t]$ の時間発展を考えたい．そのためにまず，必要なだけ微分可能な任意の関数 $F(x;t)$ のアンサンブル平均を考える:

$$\langle F(x(t);t)\rangle = \int dxP[x;t]F(x;t). \tag{B.38}$$

この左辺を t で全微分すると，伊藤公式 (B.27) より

$$\langle dF\rangle = \left\langle\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}f+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}g^2\right\rangle dt \tag{B.39}$$

が得られる．したがって

$$\frac{d\langle F\rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}f + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}g^2 \right\rangle$$
$$= \int dx P[x;t]\left[\frac{\partial F(x;t)}{\partial t} + \frac{\partial F(x;t)}{\partial x}f(x;t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(x;t)}{\partial x^2}g(x;t)^2\right] \tag{B.40}$$

となる．一方，(B.38) の右辺を t で微分すると，

$$\int dx \left[\frac{\partial P[x;t]}{\partial t}F(x;t) + P[x;t]\frac{\partial F(x;t)}{\partial t}\right] \tag{B.41}$$

となる．そこで (B.40) の右辺と (B.41) が等しいとおくことにより，

$$\int dx \frac{\partial P[x;t]}{\partial t}F(x;t) = \int dx P[x;t]\left[\frac{\partial F(x;t)}{\partial x}f(x;t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(x;t)}{\partial x^2}g(x;t)^2\right] \tag{B.42}$$

を得る．ここで，無限遠で確率がゼロになるという条件 $\lim_{x\to\pm\infty}P[x;t]=0$ を課すと*5)，(B.42) の右辺を部分積分することで

$$\int dx \frac{\partial P[x;t]}{\partial t}F(x;t) = \int dx F(x;t)\left[-\frac{\partial f(x;t)P[x;t]}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g(x;t)^2 P[x;t]}{\partial x^2}\right] \tag{B.43}$$

を得る．これが任意の関数 $F(x;t)$ について成り立つので，

$$\frac{\partial P[x;t]}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[f(x;t)P[x;t]] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[g(x;t)^2 P[x;t]] \tag{B.44}$$

が成り立つことが分かる．(B.44) が x の確率分布の時間発展を与える**フォッカー・プランク方程式（Fokker-Planck equation）**である．これは離散変数の場合のマスター方程式 (B.2) の連続変数版である．

最も簡単な場合として，$f(x;t)=0$ かつ $g(x;t):=\sqrt{2D}$（D は正の定数）である場合を考えよう．この場合は $x(t)=\sqrt{2D}W(t)$ となり，$x(t)$ は分散 $2D$ のウィーナー過程そのものである．このとき，フォッカー・プランク方程式は

$$\frac{\partial P[x;t]}{\partial t} = D\frac{\partial^2 P[x;t]}{\partial x^2} \tag{B.45}$$

となる．これはよく知られた拡散方程式に他ならない．(B.45) は解析的に解けて，

$$P[x;t] = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \tag{B.46}$$

が解である．ただし境界条件を $\lim_{x\to\pm\infty}P[x;t]=0$ および $\lim_{t\to+0}P[x;t]=\delta(x)$ とした．(B.46) は，x の分散が t に比例して大きくなっていくという，ウィーナー過程の性質と整合している．

B.1.5 多変数への拡張

以上の議論を，多変数の確率過程へと一般化しよう．$x:=(x^1,x^2,\cdots,x^d)\in\mathbb{R}^d$ とする．確率微分方程式が

$$dx^i = f^i(x;t)dt + g^i(x;t)\cdot dW^i, \quad i=1,2,\cdots,d \tag{B.47}$$

*5) x に周期境界条件を課している場合は，境界で不連続性がないという条件を課す．

で与えられるとする．ここで $f^i(x;t)$ と $g^i(x;t)$ $(i=1,2,\cdots,d)$ は x と t の必要なだけ微分可能な関数である．また dW^i $(i=1,2,\cdots,d)$ はウィーナー増分で，$i\neq j$ のとき dW^i と dW^j は独立と仮定する*6)．このとき，伊藤公式 (B.28) の一般化として

$$dW^i dW^j = \delta_{ij} dt \tag{B.48}$$

が成り立つ．ここで δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．$i\neq j$ のとき $dW^i dW^j=0$ となるのは，dW^i と dW^j が独立であることを表している．

$F(x;t)$ を x と t の必要なだけ微分可能な関数とする．$F(x(t);t)$ を t で全微分するには，dx の二次まで展開し，伊藤公式 (B.48) を用いればよい：

$$\begin{aligned}dF &= \frac{\partial F}{\partial t}dt + \sum_i \frac{\partial F}{\partial x^i}dx^i + \frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}dx^i dx^j \\ &= \frac{\partial F}{\partial t}dt + \sum_i \frac{\partial F}{\partial x^i}(f^i dt + g^i \cdot dW^i) + \frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}g^i g^j \delta_{ij} dt \\ &= \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial x^i}f^i + \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial^2 F}{\partial x^{i2}}(g^i)^2\right]dt + \sum_i \frac{\partial F}{\partial x^i}g^i \cdot dW^i.\end{aligned} \tag{B.49}$$

また，B.2.4 節の議論と同様にして，フォッカー・プランク方程式を導くことができる：

$$\frac{\partial P[x;t]}{\partial t} = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}[f^i(x;t)P[x;t]] + \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x^{i2}}[g^i(x;t)^2 P[x;t]]. \tag{B.50}$$

簡単な例として，確率微分方程式が次のように与えられる場合を考えよう．

$$dx^i(t) = \sum_j a_{ij}(t)x^j(t)dt + u^i(t)dt + g^i(t)\cdot dW^i(t). \tag{B.51}$$

ここで $a_{ij}(t)$，$u^i(t)$，$g^i(t)$ はは x に依存しない．以下では引数 t を省略する．(B.51) に従う x の平均値と分散の時間発展を求めよう．まず，平均値に関しては明らかに

$$\frac{d\langle x^i\rangle}{dt} = \sum_j a_{ij}\langle x^j\rangle + u^i(t) \tag{B.52}$$

が成り立つ．分散に関しては，次のように定義される共分散行列を考える：

$$V^{ij} := \langle x^i x^j\rangle - \langle x^i\rangle\langle x^j\rangle. \tag{B.53}$$

これは対称な正値行列である．V^{ij} が従う微分方程式を求めたい．まず伊藤公式より

$$\begin{aligned}d(x^i x^j) =& (dx^i)x^j + x^i(dx^j) + (dx^i)(dx^j) \\ =& \sum_k \left[a_{ik}x^k x^j + x^i x^k a_{jk}\right]dt + (u^i x^j + u^j x^i)dt \\ & + g^i x^j \cdot dW^i + g^j x^i \cdot dW^j + \delta_{ij} g^i g^j dt\end{aligned} \tag{B.54}$$

を得る．したがって

$$d\langle x^i x^j\rangle = \sum_k \left[a_{ik}\langle x^k x^j\rangle + \langle x^i x^k\rangle a_{jk}\right]dt + (u^i\langle x^j\rangle + u^j\langle x^i\rangle)dt + \delta_{ij} g^i g^j dt \tag{B.55}$$

*6) x を適当に線形変換することで，この仮定は常に満たされる．

が成り立つ．これと (B.52) より，

$$\frac{dV^{ij}}{dt} = \sum_k \left[a_{ik}V^{kj} + V^{ik}a_{jk}\right] + \delta_{ij}g^i g^j \tag{B.56}$$

を得る．このように，二次のキュムラントまでで閉じた方程式が得られる．また，確率微分方程式 (B.51) が x に関して線形（+定数項）なので，x の初期分布がガウス分布なら，時間発展してもガウス分布のままである．したがって，x の初期分布がガウス分布の場合は，(B.52) と (B.56) が分布の時間発展に関する完全な情報を与える．なお (B.56) は，行列表記するとより簡潔に表せる．x^i を i 成分とする縦ベクトルを x として，V^{ij} や a_{ij} を (i,j) 成分とする行列を V，a とする．さらに，g^i を (i,i) 成分とする対角行列を g とする．このとき，(B.56) は

$$\frac{dV}{dt} = aV + Va^{\mathrm{T}} + g^2 \tag{B.57}$$

と書き直すことができる．ここで T は行列の転置を表す．

B.1.6 ストラトノビッチ積分

次に，伊藤積分と並ぶもう一つの確率積分の概念について議論する．簡単のために x は一変数とするが，多変数の場合への拡張は容易である．$F(x;t)$ を必要なだけ微分可能な x と t の関数とする．$t_{n+1/2} := t_n + \Delta t/2$，$x_{n+1/2} := x(t_{n+1/2})$ とおく．これに対して，次のような確率積分を定義する:

$$\int_0^\tau F(x(t);t) \circ dW(t) := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} F(x_{n+1/2};t_{n+1/2})\Delta W_n. \tag{B.58}$$

これは**ストラトノビッチ積分（stratonovich integral）**と呼ばれ，左辺の $\circ$ はそのことを明示するために用いた．伊藤積分のときと対照的に，右辺の ΔW_n の係数である $F(x_{n+1/2};t_{n+1/2})$ は，時刻 $t_{n+1/2}$ における値である．このような**ストラトノビッチ型の積（Stratonovich product）**の定義を無限小増分を使って形式的に書くと

$$F(x(t);t) \circ dW(t) := F(x(t+dt/2);t+dt/2)\left[W(t+dt) - W(t)\right] \tag{B.59}$$

となる．

ストラトノビッチ積は伊藤積に変換することができる．伊藤公式より

$$\begin{aligned}F(x(t+dt/2);t+dt/2) &= F(x(t);t)\\ &+ \left[\frac{\partial F(x(t);t)}{\partial t} + \frac{\partial Fx(t);t)}{\partial x}f(x(t);t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(x(t);t)}{\partial x^2}g(x(t);t)^2\right]\frac{dt}{2}\\ &+ \frac{\partial F(x(t);t)}{\partial x}g(x(t);t)\cdot\left[W(t+dt/2) - W(t)\right]\end{aligned} \tag{B.60}$$

が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned}F(x(t+dt/2);t+dt/2)\left[W(t+dt) - W(t)\right] &= F(x(t);t)\cdot dW(t)\\ &+ \left[\frac{\partial F(x(t);t)}{\partial t} + \frac{\partial F(x(t);t)}{\partial x}f(x(t);t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(x(t);t)}{\partial x^2}g(x(t);t)^2\right]\frac{dt}{2}\cdot dW(t)\end{aligned}$$

$$+\frac{\partial F(x(t);t)}{\partial x}g(x(t);t)\cdot[W(t+dt/2)-W(t)]\cdot dW(t) \tag{B.61}$$

となる．ここで，$dt\cdot dW(t)$ のある項は $(dt)^{3/2}$ のオーダーになるので無視し，$[W(t+dt/2)-W(t)]\cdot dW(t)=dt/2$ とすると，結局

$$F(x(t);t)\circ dW(t)=F(x(t);t)\cdot dW(t)+\frac{\partial F(x(t);t)}{\partial x}\frac{g(x(t);t)}{2}dt, \tag{B.62}$$

あるいは簡略に

$$F\circ dW=F\cdot dW+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{g}{2}dt \tag{B.63}$$

を得る．これがストラトノビッチ積から伊藤積への変換公式である．F が x に依存しなければ，伊藤積とストラトノビッチ積は一致することが分かる．

また，確率微分方程式 (B.12) より $dx(t)$ には $dW(t)$ の項が含まれているので，$F(x(t);t)$ と $dx(t)$ の積にも伊藤型とストラトノビッチ型の区別がある．両者の間の変換公式は，(B.62) あるいは (B.63) より，

$$\begin{aligned}F\circ dx&=F\cdot dx+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{g^2}{2}dt\\&=\left[Ff+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{g^2}{2}\right]dt+Fg\cdot dW\end{aligned} \tag{B.64}$$

となる．この変換公式を使って，伊藤公式 (B.27) をストラトノビッチ型に書き換えることができる．まず，(B.64) の F を $\partial F/\partial t$ に置き換えることで，

$$\frac{\partial F}{\partial x}\circ dx=\left[\frac{\partial F}{\partial x}f+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{g^2}{2}\right]dt+\frac{\partial F}{\partial x}g\cdot dW \tag{B.65}$$

を得る．これを (B.27) に代入すると，

$$dF=\frac{\partial F}{\partial t}dt+\frac{\partial F}{\partial x}\circ dx \tag{B.66}$$

が成り立つことが分かる．すなわち，ストラトノビッチ積を用いると，確率過程の場合も，通常の合成関数の微分則と同じ形の式が成り立つことが分かる．

同様に，積の微分則をストラトノビッチ積の観点から考えることができる．$F(x)$，$G(x)$ を必要なだけ微分可能な関数とするとき，

$$F\circ dG=F\cdot dG+\frac{1}{2}\frac{dF}{dt}\frac{dG}{dt}g^2dt \tag{B.67}$$

などが成り立つので，(B.33) より

$$d(FG)=F\circ dG+G\circ dF \tag{B.68}$$

が成り立つことが分かる．

以上のように，ストラトノビッチ積を使うと，通常の微積分の場合と同じ形の式が成り立つことが分かる．この意味でストラトノビッチ積は有用である．ただし，アンサンブル平均については，一般に

$$\langle F\circ dW\rangle\neq\langle F\rangle\langle dW\rangle \tag{B.69}$$

なので注意が必要である．アンサンブル平均を計算する場合は，伊藤積に変換してから計

算することが必要である．

ストラトノビッチ積の場合に通常の微積分の場合と同じ形の式が成り立つのは，以下のような理由による．$dW(t)$ を t について滑らかな（微分可能な）関数によって近似して（すなわち，スムージングしてから）$F(x(t))$ との積を計算し，その後で $dW(t)$ が特異性をもつ（微分不可能である）という極限をとると，積はストラトノビッチ型に収束することが知られている[77]．$dW(t)$ が微分可能な関数ならば通常の微積分の公式が成り立つので，その性質をストラトノビッチ積の極限でも引き継いでいることになる．

B.1.7　ランジュバン方程式

物理的な具体例として，水中にある微小粒子のブラウン運動を考える．簡単のために空間は一次元とする．位置を x，運動量を p とする．質量を m，外力を $F(x;t)$，水の粘性係数を γ とすると，ブラウン粒子の運動は

$$dp(t) = -\frac{\gamma}{m}p(t)dt + F(x(t);t)dt + gdW(t) \tag{B.70}$$

$$dx(t) = \frac{p(t)}{m}dt \tag{B.71}$$

と記述できる．$gdW(t)$ が水分子による揺動力を表す．ここで g は (x,p) や t に依存しない定数であり，あとで物理的要請から決められる．これが x や p に依存しないので，$gdW(t)$ は伊藤積と解釈してもストラトノビッチ積と解釈しても違いがない．式 (B.70) と (B.71) は，**ランジュバン方程式（Langevin equation）**と呼ばれる．

ランジュバン方程式は，(x,p) の二変数の確率微分方程式だとみなすことができる．ただし，dx に加わるウィーナー増分（の係数）はゼロである．(x,p) の時刻 t における確率分布を $P[x,p;t]$ とすると，その時間発展を記述するフォッカー・プランク方程式は

$$\frac{\partial P[x,p;t]}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{m} - \frac{\partial}{\partial p}\left(-\frac{\gamma p}{m} + F(x;t)\right) + \frac{g^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right]P[x,p;t] \tag{B.72}$$

となる．ただし，右辺の微分演算子はすべて，右端の $P[x,p;t]$ まで作用することに注意．(B.72) はクラマース方程式（Kramers equation）とも呼ばれる．

ここで，外力は時間依存しないポテンシャル $V(x)$ に由来すると仮定する:

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}. \tag{B.73}$$

このとき，(B.72) の定常解は

$$P_{\rm ss}[x,p] = \frac{1}{Z}\exp\left(-\frac{2\gamma}{g^2}\left(\frac{p^2}{2m} + V(x)\right)\right) \tag{B.74}$$

で与えられることが分かる．ここで Z は規格化因子で，

$$Z := \int dxdp\exp\left(-\frac{2\gamma}{g^2}\left(\frac{p^2}{2m} + V(x)\right)\right) \tag{B.75}$$

で与えられる．いま，熱浴である水の温度を T とすると，この定常分布は温度 T のカノニカル分布のはずである．このことを仮定すると，$2\gamma/g^2 = (k_{\rm B}T)^{-1}$，すなわち

$$g = \sqrt{2\gamma k_{\rm B}T} \tag{B.76}$$

が成り立つ．この揺動力の大きさと温度を結び付ける関係式は，**第二種揺動散逸定理**と呼ばれる．このとき，Z は分配関数に他ならない．

なお，ランジュバン方程式 (B.70) は，物理学の文献ではしばしば次のように表記される*7)：

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\frac{\gamma}{m}p(t) + F(x(t);t) + g\xi(t). \tag{B.77}$$

ここで $\xi(t)$ は**ホワイトノイズ**（**white noise**）と呼ばれる単位時間当たりの揺動力で，

$$\xi(t) := \frac{dW(t)}{dt} \tag{B.78}$$

と定義される．しかし，$W(t)$ がそもそも微分不可能であることを考えると，$\xi(t)$ は通常の関数ではなく，デルタ関数的な特異性をもっていると考えられる．実際，ホワイトノイズの時間相関は

$$\langle \xi(t')\xi(t') \rangle = \delta(t'-t) \tag{B.79}$$

で与えられる．これは次のようにして直感的に示すことができる．$\Delta t > 0$ で時間を離散化して考える．まず，$t' > t+\Delta t$ のとき，$\langle [W(t'+\Delta t)-W(t')][W(t+\Delta t)-W(t)] \rangle = 0$ である．また，$\langle [W(t+\Delta t)-W(t)]^2 \rangle = \Delta t$ なので，$\langle [(W(t+\Delta t)-W(t))/\Delta t]^2 \rangle = \Delta t^{-1}$ となる．したがって，$\Delta t \to 0$ の極限で，$\langle [W(t'+\Delta t)-W(t')][W(t+\Delta t)-W(t)]/\Delta t^2 \rangle$ はデルタ関数 $\delta(t'-t)$ とみなすことができる．

B.1.8 ポアソン過程

これまでは，ガウス分布に従うウィーナー過程に駆動される確率過程を考えてきた．次に，**ポアソン過程**（**Poisson process**）に駆動される確率過程について考える．ウィーナー過程の場合と同様に，実数値をとる変数 $x \in \mathbb{R}$ の確率過程を考える．時間を離散化して，時間発展が

$$\Delta x_n := f(x_n;t_n)\Delta t + g(x_n;t_n)\Delta N_n \tag{B.80}$$

で与えられるとする．ウィーナー過程のときの (B.10) との違いは，右辺第二項の ΔN_n である．これは 0 か 1 の値をとる確率変数であり，1 をとる確率 $P[\Delta N_n = 1]$ は，適当な時間の関数 $h(t)$ を使って

$$P[\Delta N_n = 1] = h(t_n)\Delta t \tag{B.81}$$

と書けるとする．また，$n \neq m$ のとき ΔN_n と ΔN_m は独立とする．すなわち，各微小時間ごとに独立に「サイコロ」をふり，Δt に比例する小さな確率で 1 がでる，という状況を表している．$\Delta N_n = 1$ となった瞬間に Δx_n は不連続に変化することになる．

さて，$\Delta t \to 0$ の極限をとって，(B.80) を形式的に微分形で書くと

$$dx(t) = f(x(t);t)dt + g(x(t);t) \cdot dN(t) \tag{B.82}$$

となる．ここで，(B.80) における ΔN_n の係数が時刻 t_n における値 $g(x_n;t_n)$ なので，(B.82) は伊藤型の確率微分方程式である．ガウス過程のときと同様に，$\cdot$ によって伊藤型の積であることを表す．この極限で，(B.81) は

*7) たとえば [28] を参照．

$$P[dN(t) = 1] = h(t)dt \tag{B.83}$$

と書ける．あるいは，アンサンブル平均 $\langle\cdots\rangle$ で書くと

$$\langle dN(t)\rangle = h(t)dt \tag{B.84}$$

となる．なお，

$$N(t) := \int_0^t dN(t') := \lim_{\Delta t\to 0}\sum_{n=0}^{N-1}\Delta N_n \tag{B.85}$$

で定義された $N(t)$ はポアソン過程と呼ばれる．これは $dN(t) = 1$ となる時刻に不連続に変化するので，ウィーナー過程よりも強い特異性をもつ（ウィーナー過程は微分不可能ではあるが連続であった）．なお，$dN(t)$ は**ポアソン増分**（**Poisson increment**）と呼ばれる．

定義より ΔN_n は 0 か 1 の値しかとらないので，$\Delta N_n^2 = \Delta N_n$ が成り立つ．また，$n \neq m$ のとき ΔN_n と ΔN_m は独立なので，$\langle\Delta N_n\Delta N_m\rangle = \langle\Delta N_n\rangle\langle\Delta N_m\rangle = o(\Delta t^2)$ となる．したがって，$\Delta N_n\Delta N_m$ は $o(\Delta t)$ のオーダーであり，$\Delta t \to 0$ の極限で 0 とみなすことができる．以上をまとめると，$\Delta t \to 0$ の極限で

$$dN(t)dN(t') = \delta_{tt'}dN(t) \tag{B.86}$$

と書ける．ここで $\delta_{tt'}$ はクロネッカーのデルタである．これはポアソン増分の計算規則を与えているので，伊藤公式のポアソン過程版とみなすことができる．

多変数の場合についても，独立な複数のポアソン過程を考えることができる．d 個の独立なポアソン過程を $N_k(t)$ $(k = 1, 2, \cdots, d)$ とする．なお，以下では添え字 k は時刻を表すものではなく，異なるポアソン過程を表す．それぞれのポアソン過程の無限小増分は 0 か 1 の値をとり，その平均値は適当な関数 $h_k(t)$ によって

$$\langle dN_k(t)\rangle = h_k(t)dt \tag{B.87}$$

で与えられるとする．異なるポアソン過程の独立性より $\langle dN_k(t)dN_{k'}(t)\rangle = \langle dN_k(t)\rangle\langle dN_{k'}(t)\rangle = o(dt^2)$ となる．したがって，ポアソン過程の伊藤公式 (B.86) の多変数への一般化として，

$$dN_k(t)dN_{k'}(t') = \delta_{tt'}\delta_{kk'}dN_k(t) \tag{B.88}$$

を得る．

なお，ポアソン過程においては，ストラトノビッチ型の積は必ずしも有用ではないことが知られている．たとえば，ポアソン過程でストラトノビッチ型の積を使っても，ガウス過程の場合と違って通常の合成関数の微分則などは成り立たない．また，微分可能な関数の極限として微分不可能なポアソン過程を考えても，ストラトノビッチ積には収束しない．その理由は，ポアソン過程はウィーナー過程よりも強い特異性をもつことである．ポアソン過程の場合は，ストラトノビッチ積分のかわりに，マーカス積分（Marcus integral）あるいは $*$ 積分と呼ばれる概念を使う必要がある[*8)]．

---

*8)　たとえば [27], [78] を参照．また，[23] にも関連する計算規則の議論がある．

B.2 軌道推定とカルマンフィルタ

確率微分方程式で記述されるダイナミクスに対して，誤差のある測定を行う状況を考える．このとき，測定結果からどうやって精度よくもとのダイナミクスの軌道を推定するか，という問題を考える．本節では，そのためのアプローチの一つである，**ベイズ推定** (**Bayesian inference**) に基づく考え方を紹介する．以下に述べるように，ベイズ推定とは，ある測定結果を得たという条件のもとで軌道のアンサンブル平均（期待値）を計算し，それを推定結果として採用するという推定法である．

B.2.1 ベイズ推定

確率過程の推定を考えるための準備として，ベイズ推定の基本的な考え方を述べよう．ある古典確率変数 x を測定し，測定結果 y を得るという状況を考えよう．以下では確率変数 A の期待値を $E[A]$ あるいは $\langle A\rangle$ で表す．

x は確率分布 $p(x)$ に従っており，ある x が実現されているという条件のもとで y が得られる条件付き確率を $p(y|x)$ とする．x と y の結合確率分布は $p(x,y)=p(y|x)p(x)$ である．ある y を得たという条件のもとでの x の条件付き確率は，$p(x|y)=p(x,y)/p(y)$ で与えられる．これは

$$p(x|y)=\frac{p(y|x)p(x)}{\sum_x p(y|x)p(x)} \tag{B.89}$$

と書くこともできる．(B.89) はベイズの定理と呼ばれる．

さて，ある y を得たという条件のもとでの x の条件付き期待値を

$$\langle x\rangle_{\rm c}:=E[x|y]:=\sum_x xp(x|y) \tag{B.90}$$

と書くことにする*9)．(B.90) が x のベイズ推定値である．もし測定に誤差がなく，確率 1 で $x=y$ ならば，$\langle x\rangle_{\rm c}=x=y$ が常に成り立つ．なお，y について (B.90) の期待値をとると，

$$E[\langle x\rangle_{\rm c}]:=\sum_y p(y)E[x|y]=\sum_{x,y} xp(x,y)=\langle x\rangle \tag{B.91}$$

となり，x の真の期待値と一致する．すなわち，ベイズ推定は不偏推定である．

次に，ベイズ推定の重要な性質を示しておく．これは B.3 節で最適制御を考えるときに本質的な役割を果たす．測定結果に条件付けられた x の分散を

$$V_{\rm c}:=\langle x^2\rangle_{\rm c}-\langle x\rangle_{\rm c}^2=E[x^2|y]-E[x|y]^2 \tag{B.92}$$

と定義する．このとき，

$$E[x^2]=E[\langle x\rangle_{\rm c}^2]+E[V_{\rm c}] \tag{B.93}$$

が成り立つ．なお，これは 2.2.1 節で議論した (2.69) と似た性質である．

(B.93) の証明は以下の通りである．まず，$\eta:=x-\langle x\rangle_{\rm c}$ とする．このとき

$$E[\eta^2]=E[E[(x-\langle x\rangle_{\rm c})^2|y]]=E[V_{\rm c}] \tag{B.94}$$

*9) ここで最左辺の $\langle\cdots\rangle_{\rm c}$ における添字 c は，conditional を表す．

が成り立つ．また，

$$E[\langle x\rangle_{\mathrm{c}}\eta] = E[\langle x\rangle_{\mathrm{c}} x] - E[\langle x\rangle_{\mathrm{c}}^2] = E[\langle x\rangle_{\mathrm{c}}^2] - E[\langle x\rangle_{\mathrm{c}}^2] = 0 \tag{B.95}$$

が成り立つ．以上より

$$E[x^2] = E[(\langle x\rangle_{\mathrm{c}} + \eta)^2] = E[\langle x\rangle_{\mathrm{c}}^2] + E[\eta^2] = E[\langle x\rangle_{\mathrm{c}}^2] + E[V_{\mathrm{c}}] \tag{B.96}$$

となり，(B.93) が得られる．

B.2.2 クスナー方程式

さて，確率的なダイナミクスの軌道をベイズ推定によって推定することを考えよう．確率微分方程式 (B.47) で時間発展する $x(t)$ に対して，時刻 0 からノイズのある測定を行う:

$$dy^k(t) = h^k(x(t);t)dt + r^k(t)\cdot dv^k(t), \quad k = 1,2,\cdots,d'. \tag{B.97}$$

ただし $dv^k(t)$ は $dv^k(t)dv^l(t) = \delta_{kl}dt$ を満たすウィーナー増分で，$r^k(t) \neq 0$ は x に依存しないとする．時刻 0 から t までの測定結果の集合を $Y_t := \{y(s)\}_{0\leq s\leq t}$ とする．なお，$Y_{t+dt} = Y_t \cup \{dy(t)\}$ である．

このとき，時刻 t までの測定結果に条件付けられた確率分布 $P_{\mathrm{c}}[x;t] := P[x;t|Y_t]$ が従う時間発展方程式を求めよう．時間を離散化して考える．まず，$P_{\mathrm{c}}[x;t]$ の変化を，x のダイナミクスに由来する部分と，測定結果を得たことに由来する部分に分ける:

$$\begin{aligned}\Delta P_{\mathrm{c}}[x;t] &:= P[x;t+\Delta t|Y_{t+\Delta t}] - P[x;t|Y_t] \\ &= P[x;t+\Delta t|Y_{t+\Delta t}] - P[x;t|Y_{t+\Delta t}] + P[x;t|Y_{t+\Delta t}] - P[x;t|Y_t].\end{aligned} \tag{B.98}$$

まず (B.98) の二行目の第一項と第二項は，

$$\begin{aligned}P[x;t+\Delta t|Y_{t+\Delta t}] - P[x;t|Y_{t+\Delta t}] &= \mathcal{L}[P[x;t|Y_{t+\Delta t}]]\Delta t + o(\Delta t) \\ &= \mathcal{L}[P[x;t|Y_t]]\Delta t + o(\Delta t)\end{aligned} \tag{B.99}$$

と書ける．ここで $\mathcal{L}$ はフォッカー・プランク方程式の右辺を表す微分演算子

$$\mathcal{L}[P] := -\sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}[f^i P] + \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x^{i2}}[g^{i2}P] \tag{B.100}$$

である．これは測定がないときの時間発展と同じで，x のダイナミクスそのものによる効果を表している．

測定の効果を表しているのが，(B.98) の二行目の第三項と第四項である．まず，ベイズの定理より

$$P[x;t|Y_{t+\Delta t}] = \frac{P[\Delta y;t|x]P[x;t|Y_t]}{\int dx' P[\Delta y;t|x']P[x';t|Y_t]}, \tag{B.101}$$

$$P[\Delta y;t|x] := \left((2\pi)^{d'}\sum_k (r^k)^2\Delta t\right)^{-1/2} \exp\left(-\sum_k \frac{(\Delta y^k - h^k\Delta t)^2}{2(r^k)^2\Delta t}\right) \tag{B.102}$$

が成り立つ．なお，(B.89) における y が (B.102) における Δy に対応する．(B.101) は

$$P[x;t|Y_{t+\Delta t}] = \frac{\exp\left(\sum_k \left(h^k \Delta y^k (r^k)^{-2} - 2^{-1}(h^k)^2 \Delta t (r^k)^{-2}\right)\right) P[x;t|Y_t]}{\int dx' \exp\left(\sum_k \left(h^k \Delta y^k (r^k)^{-2} - 2^{-1}(h^k)^2 \Delta t (r^k)^{-2}\right)\right) P[x';t|Y_t]} \tag{B.103}$$

と書き直せる．また伊藤公式より

$$\exp\left(\sum_k \left(\frac{h^k \Delta y^k}{(r^k)^2} - \frac{(h^k)^2 \Delta t}{2(r^k)^2}\right)\right) = 1 + \sum_k \frac{h^k \Delta y^k}{(r^k)^2} + o(\Delta t) \tag{B.104}$$

が成り立つので，(B.103) の右辺の分母は

$$1 + \sum_k \frac{\langle h^k \rangle_{\mathrm{c}} \Delta y^k}{(r^k)^2} + o(\Delta t), \tag{B.105}$$

$$\langle h^k \rangle_{\mathrm{c}} := \int dx h^k(x;t) P[x;t|Y_t] \tag{B.106}$$

となることが分かる．したがって，再び伊藤公式を用いて

$$P[x;t|Y_{t+\Delta t}] = P[x;t|Y_t] \left[1 + \sum_k \frac{(h^k - \langle h^k \rangle_{\mathrm{c}})(\Delta y^k - \langle h^k \rangle_{\mathrm{c}} \Delta t)}{(r^k)^2}\right] + o(\Delta t) \tag{B.107}$$

を得る．(B.99) と (B.107) をまとめて，$\Delta t \to 0$ の極限をとると

$$\partial_t P_{\mathrm{c}}[x;t] = \mathcal{L}[P_{\mathrm{c}}[x;t]]dt + P_{\mathrm{c}}[x;t] \sum_k \frac{(h^k - \langle h^k \rangle_{\mathrm{c}}) \cdot (dy^k - \langle h^k \rangle_{\mathrm{c}} dt)}{(r^k)^2} \tag{B.108}$$

となる．ここで $\partial_t P_{\mathrm{c}}[x;t] := P_{\mathrm{c}}[x;t+dt] - P_{\mathrm{c}}[x;t]$ とおいた．(B.108) が，ある測定結果 Y_t を得たという条件のもとでの確率分布の時間発展を決める方程式であり，**クスナー方程式（Kushner equation）**と呼ばれる．dy がウィーナー増分を含むので (B.108) は確率微分方程式である．また，(B.108) は $\langle h \rangle_{\mathrm{c}}$ があるために P_{c} について非線形である．この非線形性は，(B.103) の右辺の分母から来ている．なお，観測ノイズ $|r^k|$ が大きい極限で，(B.108) はフォッカー・プランク方程式 (B.44) に一致する．

また，測定結果 Y_t に関するアンサンブル平均をとると $E[dy^k] = E[\langle h^k \rangle_{\mathrm{c}}]dt$ が成り立つので，クスナー方程式 (B.103) のアンサンブル平均はフォッカー・プランク方程式 (B.44) に一致することが確かめられる．すなわち，条件なしの確率分布 $P[x;t]$ に対しては，測定は影響を及ぼさない．これは古典系の場合は測定の反作用がないことを意味する．

さて，(B.108) の右辺の $d\nu^k := dy^k - \langle h^k \rangle_{\mathrm{c}} dt$ の項の意味を考えよう．時間を離散化すると，この項は

$$\Delta y^k - \langle h^k \rangle_{\mathrm{c}} \Delta t = (h^k - \langle h^k \rangle_{\mathrm{c}}) \Delta t + r^k \Delta v^k \tag{B.109}$$

と書ける．右辺の $(h^k - \langle h^k \rangle_{\mathrm{c}})\Delta t$ の項は，期待値が 0，分散が Δt^2 のオーダーである．したがって，時間に関して和をとっても，期待値が 0，分散が Δt のオーダーであると考えられる．すなわち，この項は時間発展に寄与しないと考えられる．よって，$dy^k - \langle h^k \rangle_{\mathrm{c}} dt$ はウィーナー増分 $r^k dv^k$ と等価であると言える．このとき，$d\nu^k$ は**イノベーション過程（innovation process）**と呼ばれる．この観点からは，測定過程を

$$dy^k = \langle h^k \rangle_{\mathrm{c}} dt + d\nu^k \tag{B.110}$$

と書くこともできる．

B.2.3 カルマンフィルタ

前節の議論の特別な場合として，x の時間発展は (B.51) で与えられ，観測過程が

$$dy^k(t) = \sum_l b_{kl}(t)x^l(t)dt + r^k(t)\cdot dv^k(t), \quad k = 1, 2, \cdots, d'. \tag{B.111}$$

で与えられる場合を考えよう（ここで $b_{kl}(t)$ は x によらないとする）．このときクスナー方程式は

$$\begin{aligned}\partial_t P_{\rm c} = &-\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}[(a_{ij}x^j + u^i)P_{\rm c}] + \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x^{i2}}[g^{i2}P_{\rm c}]dt \\ &+ P_{\rm c}[x;t]\sum_{kl}\frac{b_{kl}(x^l - \langle x^l\rangle_{\rm c})}{(r^k)^2}\cdot\left(dy^k - \sum_l b_{kl}\langle x^l\rangle_{\rm c}dt\right)\end{aligned} \tag{B.112}$$

となる．

この状況で，x の条件付き期待値 $\langle x\rangle_{\rm c} := E[x|Y_t]$ の時間発展を考えよう．これは，(B.112) の両辺に x をかけて積分することで得られる:

$$d\langle x^i\rangle_{\rm c} = \sum_j a_{ij}\langle x^j\rangle_{\rm c}dt + u^i dt + \sum_{kl}\frac{b_{kl}(\langle x^i x^l\rangle_{\rm c} - \langle x^i\rangle_{\rm c}\langle x^l\rangle_{\rm c})}{(r^k)^2}\cdot\left(dy^k - \sum_l b_{kl}\langle x^l\rangle_{\rm c}dt\right). \tag{B.113}$$

ここで，条件付きの共分散行列を

$$V_{\rm c}^{ij} := \langle x^i x^j\rangle_{\rm c} - \langle x^i\rangle_{\rm c}\langle x^j\rangle_{\rm c} := E[x^i x^j|Y_t] - E[x^i|Y_t]E[x^j|Y_t] \tag{B.114}$$

とおく．イノベーション過程を $d\nu^k := dy^k - \sum_l b_{kl}\langle x^l\rangle_{\rm c}dt$ とすると，(B.113) は

$$d\langle x^i\rangle_{\rm c} = \sum_j a_{ij}\langle x^j\rangle_{\rm c}dt + u^i dt + \sum_{kl}\frac{1}{(r^k)^2}b_{kl}V_{\rm c}^{il}\cdot d\nu^k \tag{B.115}$$

と書くことができる．

次に $V_{\rm c}^{ij}$ の時間発展を考えよう．(B.112) と (B.115) より

$$\begin{aligned}dV_{\rm c}^{ij} = &\left[\sum_k\left[a_{ik}V_{\rm c}^{kj} + V_{\rm c}^{ik}a_{jk}\right] + \delta_{ij}g^i g^j - \sum_{klm}\frac{b_{kl}b_{km}V_{\rm c}^{il}V_{\rm c}^{jm}}{(r^k)^2}\right]dt \\ &+ \sum_{klm}\frac{b_{kl}\langle x^i x^j x^l\rangle_{\rm c}^{(3)}}{(r^k)^2}\cdot d\nu^k\end{aligned} \tag{B.116}$$

が得られる．ここで

$$\langle x^i x^j x^l\rangle_{\rm c}^{(3)} := \langle x^i x^j x^l\rangle_{\rm c} - \langle x^i\rangle_{\rm c}\langle x^j x^l\rangle_{\rm c} - \langle x^j\rangle_{\rm c}\langle x^l x^i\rangle_{\rm c} - \langle x^l\rangle_{\rm c}\langle x^i x^j\rangle_{\rm c} + 2\langle x^i\rangle_{\rm c}\langle x^j\rangle_{\rm c}\langle x^l\rangle_{\rm c} \tag{B.117}$$

は三次のキュムラントである．

ここで x の初期分布がガウス分布であると仮定する．時間発展も測定も線形で，かつ時間発展のノイズも観測のノイズもガウス的なので，Y_t の条件のもとでの $x(t)$ の確率分布はガウス的なままである．したがって，三次キュムラント (B.117) は常にゼロであり，(B.115) は

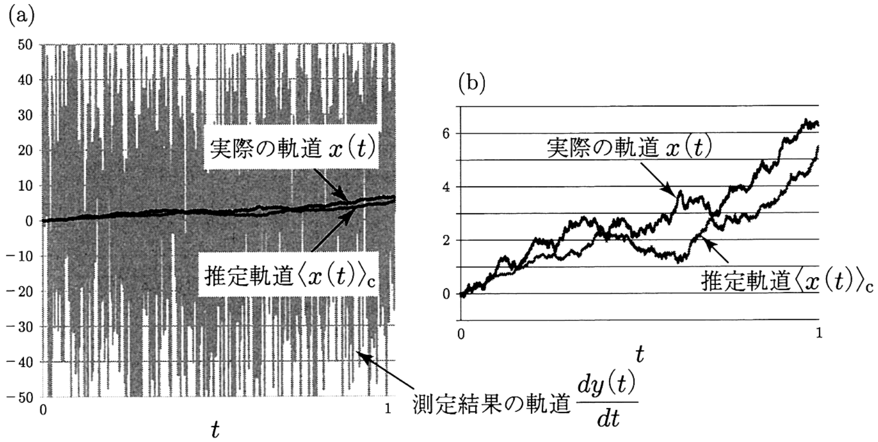


図 B.2 カルマンフィルタの数値シミュレーション結果．ダイナミクスは $dx(t) = 5dt + 2dW(t)$，測定は $dy = xdt + dv$ によって与えられる．なお，このとき $\langle dy(t)/dt\rangle = x(t)$（この $\langle\cdots\rangle$ は dv だけに関するアンサンブル平均）が成り立つ．(a) 実際の軌道 $x(t)$，カルマンフィルタによる推定軌道 $\langle x(t)\rangle_{\mathrm{c}}$，測定結果の軌道 $dy(t)/dt$ の一例．$t = 0$ から $t = 1$ までを示した．$dy(t)/dt$ は白色ノイズ $dv(t)/dt$ によって非常に大きく振動しているが，推定軌道は実際の軌道に近いことが分かる．(b) (a) のうち実際の軌道 $x(t)$ と推定軌道 $\langle x(t)\rangle_{\mathrm{c}}$ の付近だけを拡大したもの．

$$\frac{dV_{\mathrm{c}}^{ij}}{dt} = \sum_k \left[a_{ik}V_{\mathrm{c}}^{kj} + V_{\mathrm{c}}^{ik}a_{jk}\right] + \delta_{ij}g^i g^j - \sum_{klm}\frac{b_{kl}b_{km}V_{\mathrm{c}}^{il}V_{\mathrm{c}}^{jm}}{(r^k)^2} \tag{B.118}$$

となる．すなわち，初期分布がガウスのときは，条件付き分散の時間発展は決定論的になり，かつ V_{c}^{ij} について閉じた常微分方程式になる．(B.118) は**リカッチ方程式**と呼ばれる．さらに，(B.113) と (B.118) を連立させると，$\langle x\rangle_{\mathrm{c}}$ と V_{c}^{ij} について閉じている．さらに，これを解くためには，各時刻での測定結果 dy だけを知っていればよく，x の真の値を知っている必要はない．このことにより，測定結果 dy に基づいて逐次的に $\langle x\rangle_{\mathrm{c}}$ と V_{c}^{ij} の時間発展を求めることができる．このような計算手続きが**カルマンフィルタ**（**Kalman filter**）である*10)．図 B.2 にカルマンフィルタによる推定の数値シミュレーション結果を示す．この結果が直感的に示すように，条件付き期待値 $\langle x\rangle_{\mathrm{c}}$ を求めることは，測定ノイズをフィルタリング（ろ過）することに他ならない．これがカルマンフィルタという名前の由来である．

なお，行列表示をすると，(B.113) と (B.118) はより簡潔に表せる．(B.57) のときと同様に，x^i や y^i を i 成分とする縦ベクトルをそれぞれ x，y として，V_{c}^{ij}，a_{ij}，b_{ij} を (i,j) 成分とする行列をそれぞれ V_{c}，a，b とする．さらに，g^i や r^i を (i,i) 成分とする対角行列をそれぞれ g，r とする．このとき，(B.113) と (B.118) はそれぞれ

$$d\langle x\rangle_{\mathrm{c}} = a\langle x\rangle_{\mathrm{c}}dt + udt + V_{\mathrm{c}}b^{\mathrm{T}}r^{-2}\cdot(dy - b\langle x\rangle_{\mathrm{c}}dt), \tag{B.119}$$

*10) カルマン・ブーシー・フィルタ（Kalman-Bucy filter）とも呼ばれる．

$$\frac{dV_{\rm c}}{dt} = aV_{\rm c} + V_{\rm c}a^{\rm T} + g^2 - V_{\rm c}b^{\rm T}r^{-2}bV_{\rm c} \tag{B.120}$$

となる．

B.3 最適制御理論

本節では，測定結果に基いてシステムのダイナミクスを制御する，フィードバック制御について議論する．とくに最適制御と呼ばれる方法を紹介しよう．簡単のため，以下では変数 x は一次元とする（多次元の場合への拡張は直接的にできる）．フィードバック制御の目的は，たとえば x のゆらぎ $\langle x^2 \rangle$ を小さくすることである．一方で，フィードバックには制御入力の大きさ（物理的には電力などに対応する）のようなコストがかかる．そこで，目標とするゆらぎの圧搾と制御にかかるコストとの兼ね合いで最適な制御方法を見出すことが，最適制御理論の目的である．

時刻 $t=0$ から $t=\tau$ までの，次のような x のダイナミクスを考える:

$$dx(t) = a(t)x(t)dt + g(t)\cdot dW(t) + u(t)dt. \tag{B.121}$$

ここで $u(t)$ が制御の影響を表しており，この時間依存性が制御プロトコルに対応する．フィードバック制御の場合は，$u(t)$ が t 以前の測定結果に依存することになる．また，x の初期分布はガウス分布とする．

B.3.1 測定誤差がない場合

まず，軌道 $x(t)$ に関する情報を誤差なくリアルタイムで使ってフィードバックできるような，理想的な状況を考えよう．制御の最適性を定量化する指標として，次のような次の $u(t)$ の汎関数を考える:

$$J[u] := E\left[Fx(\tau)^2 + \int_0^\tau [M(t)x(t)^2 + N(t)u(t)^2]dt\right]. \tag{B.122}$$

この $J[u]$ は**評価汎関数**と呼ばれる．これを最小にするような $u(t)$ を決めることが目標である．ここで，$Fx(\tau)^2$ は終状態での $x(\tau)$ のゆらぎを小さくすることに，$\int_0^\tau M(t)x(t)^2dt$ は途中での $x(t)$ のゆらぎを小さくすることに対応している．どの時刻での $x(t)$ のゆらぎをより小さくしたいかに応じて，F の値と $M(t)$ の関数形を決めることになる．一方，$\int_0^\tau N(t)x(t)^2dt$ は制御入力 $u(t)$ を小さくする（すなわち，コストを小さくする）ことに対応している．このように，ゆらぎを小さくするという目的と，そのためのコストを小さくするという目的の兼ね合いによって，最適な制御入力を決定することになる．

以下では，$J[u]$ を最小化する $u(t)$ を求めるための一つの方法を紹介する．まず次の関数を定義する:

$$S(x;t) := \min_{u(s);\ t\le s\le\tau} E\left[Fx(\tau)^2 + \int_t^\tau [M(t')x(t')^2 + N(t')u(t')^2]dt' \middle| x(t) = x\right]. \tag{B.123}$$

ここで $E[\cdots|x(t)=x]$ は，$x(t)$ の値が x であるという条件のもとでの条件付き期待値を表す．これを変形すると

$$
S(x;t) = \min_{u(s);\ t \le s \le \tau} E\left[\int_t^{t+\Delta t} [M(t')x(t')^2 + N(t')u(t')^2]dt' \right.
$$
$$
\left. + E\left[Fx(\tau)^2 + \int_{t+\Delta t}^{\tau} [M(t')x(t')^2 + N(t')u(t')^2]dt' \middle| x(t+\Delta t) = x + \Delta x\right] \middle| x(t) = x\right] \tag{B.124}
$$

となる．ここで Δx と Δt は，確率微分方程式 (B.121) によって関連づいている．

ここで「最適性の原理」と呼ばれる考え方を導入しよう．これは，「最適な制御プロトコル $u(t)$ を設計するときに，時刻 t 以降のプロトコルは，それ以前のプロトコルが何であったかと独立に設計できる」という考え方[*11)]である．すなわち，制御プロトコルの過去の履歴に依存せずに，逐次的に最適な制御プロトコルを決める．これは**動的計画法**（**dynamic programming**）の一種である．この考え方に基づけば，

$$
\begin{aligned}
&S(x;t) \\
&= \min_{u(s);\ t \le s \le t+\Delta t} E\left[\int_t^{t+\Delta t} [M(t')x(t')^2 + N(t')u(t')^2]dt' + \min_{u(s);t+\Delta t \le s \le \tau} E\left[Fx(\tau)^2 \right.\right. \\
&\left.\left. + \int_{t+\Delta t}^{\tau} [M(t')x(t')^2 + N(t')u(t')^2]dt' \middle| x(t+\Delta t) = x + \Delta x\right] \middle| x(t) = x\right] \\
&= \min_{u(s);\ t \le s \le t+\Delta t} E\left[\int_t^{t+\Delta t} [M(t')x(t')^2 + N(t')u(t')^2]dt' \right. \\
&\qquad \left. + S(x+\Delta x; t+\Delta t) \middle| x(t) = x\right]
\end{aligned} \tag{B.125}
$$

が成り立つ．ここで伊藤公式 (B.27) などを用いると

$$
\begin{aligned}
S(x;t) = \min_{u(t)} E\Bigg[&[M(t)x(t)^2 + N(t)u(t)^2]\Delta t + S(x;t) + \frac{\partial S(x;t)}{\partial t}\Delta t \\
&+ \frac{\partial S(x;t)}{\partial x}[a(t)x + u(t)]\Delta t + \frac{\partial S(x;t)}{\partial x} g(t)\Delta W(t) \\
&+ \frac{g(t)^2}{2}\frac{\partial^2 S(x;t)}{\partial x^2}\Delta t + o(\Delta t) \Bigg| x(t) = x\Bigg]
\end{aligned} \tag{B.126}
$$

となる．したがって，$\Delta t \to 0$ の極限で

$$
-\frac{\partial S(x;t)}{\partial t} = \min_{u(t)} \left[M(t)x^2 + N(t)u(t)^2 + \frac{\partial S(x;t)}{\partial x}[a(t)x + u(t)] + \frac{g(t)^2}{2}\frac{\partial^2 S(x;t)}{\partial x^2}\right] \tag{B.127}
$$

が成り立つ．(B.127) は**ベルマン方程式**（**Bellman equation**）と呼ばれる．ここで右辺は $u(t)$ についての二次式なので容易に最小化できて，

$$
u^*(t) := -\frac{1}{2N(t)}\frac{\partial S(x;t)}{\partial x} \tag{B.128}
$$

のとき，最小値

*11） あるいは，問題を解くための処方箋（Ansatz）．

$$-\frac{\partial S(x;t)}{\partial t} = M(t)x^2 + \frac{\partial S(x;t)}{\partial x}a(t)x + \frac{g(t)^2}{2}\frac{\partial^2 S(x;t)}{\partial x^2} - \frac{1}{4N(t)}\left(\frac{\partial S(x;t)}{\partial x}\right)^2 \tag{B.129}$$

をとることが分かる．(B.129) は $S(x;t)$ についての偏微分方程式であり，境界条件は $S(x;\tau) = Fx^2$ である．

(B.129) は一見複雑であるが，以下のような形式解を得ることができる:

$$S(x;t) = \Pi(t)x^2 + \beta(t). \tag{B.130}$$

ここで $\Pi(t)$ と $\beta(t)$ は

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} + 2a(t)\Pi(t) + M(t) - \frac{\Pi(t)^2}{N(t)} = 0, \quad \Pi(\tau) = F, \tag{B.131}$$

$$\frac{d\beta(t)}{dt} + g(t)^2\Pi(t) = 0 \tag{B.132}$$

の解である．(B.130) が解であることは，実際に (B.129) に代入して確かめることができる．このとき (B.128) は

$$u^*(t) = -\frac{\Pi(t)}{N(t)}x(t) \tag{B.133}$$

で与えられる．これが最適制御プロトコルである．(B.133) の右辺は $x(t)$ に依存しているので，このプロトコルを実現するには $x(t)$ を正確に知って（すなわち，誤差なく観測して）その値を遅れなく（すなわち，マルコフ的に）フィードバックすることが必要である．すなわち，(B.131) を逐次的に解いて得た $\Pi(t)$ と観測で得た $x(t)$ を使うと，最適制御が実現できる．なお，$x(t)dt$ は dt のオーダーの量なので，上記の結果は $u(t)dt$ の一次までしかとらなかった計算と整合的である．なお，(B.131) もリカッチ方程式と呼ばれる．

簡単な場合として，(B.121) において $a(t) = 0$ であり，さらに評価汎関数において $M(t) = 0$ で，かつ $N(t)$ は時間に依存しない場合を考える．これは，x が拡散していくだけのダイナミクスにおいて，途中過程のゆらぎは無視して終時刻でのゆらぎをできるだけ小さくし，かかるコストは時間に関して一様に評価することに対応する．このとき (B.131) は

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} - \frac{\Pi(t)^2}{N} = 0 \tag{B.134}$$

となる．これを変数分離法で解いて (B.133) に代入すると

$$u^*(t) = -\frac{x(t)}{(N/F) + \tau - t} \tag{B.135}$$

が最適な制御入力であることが分かる．$N/F \to +\infty$ の極限で，制御のコストが無限大になるので $u^*(t) \to 0$ となる．一方，$N/F \to 0$ の極限では制御にコストがかからないので，$\lim_{t\to\tau} |u^*(t)| = +\infty$ となる．

B.3.2 測定誤差がある場合

次に，B.3.1 節の議論を一般化し，測定に誤差がある場合の最適制御について議論する．x のダイナミクスは (B.121) で与えられ，初期分布はガウス分布とする．測定は (B.111) と同様に次式で与えられるとしよう:

$$dy(t) = b(t)x(t)dt + r(t) \cdot dv(t). \tag{B.136}$$

このとき，(B.122) で与えられる評価汎関数 $J[u]$ を最小化する $u(t)$ を求めたい．ただし，今の場合は測定に誤差があり $x(t)$ を完全には知ることができない．すなわち，$u(t)$ は $Y_t := \{y(s)\}_{s=0}^t$ だけから決められる必要がある．この制約のもとで $J[u]$ を最小化するという問題を考えよう．

まず，B.2.1 で議論したベイズ推定の一般的性質 (B.93) より，評価汎関数を

$$\begin{aligned} J[u] =& E\left[F\langle x(\tau)\rangle_{\mathrm{c}}^2 + \int_0^\tau [M(t)\langle x(t)\rangle_{\mathrm{c}}^2 + N(t)u(t)^2]dt \right. \\ & \left. + FV_{\mathrm{c}}(\tau) + \int_0^\tau M(t)V_{\mathrm{c}}(t)dt\right] \end{aligned} \tag{B.137}$$

と書くことができる．ここで

$$V_{\mathrm{c}}(t) := \langle x(t)^2\rangle_{\mathrm{c}} - \langle x(t)\rangle_{\mathrm{c}}^2 \tag{B.138}$$

は条件付き分散である．もし仮にフィードバックがなく $u(t)$ が事前に決まっていたプロトコルだったとすると，$V_{\mathrm{c}}(t)$ の時間発展は

$$\frac{dV_{\mathrm{c}}(t)}{dt} = 2a(t)V_{\mathrm{c}}(t) + g(t)^2 - \frac{b(t)^2V_{\mathrm{c}}(t)^2}{r(t)^2} \tag{B.139}$$

となり，$u(t)$ には依存しない．さらに，もし $u(t)$ が測定結果 Y_t に依存したとしても，$V_{\mathrm{c}}(t)$ が Y_t に条件付けられていたことに注意すると，$V_{\mathrm{c}}(t)$ の時間発展は (B.139) と同じになりやはり $u(t)$ には依存しないことが分かる．したがって，最適制御プロトコルを求めるには

$$J'[u] := E\left[F\langle x(\tau)\rangle_{\mathrm{c}}^2 + \int_0^\tau [M(t)\langle x(t)\rangle_{\mathrm{c}}^2 + N(t)u(t)^2]dt\right] \tag{B.140}$$

を最小化すればいいことが分かる．ここで，$J[u]$ の $x(t)$ を $\langle x(t)\rangle_{\mathrm{c}}$ で置き換えたものが $J'[u]$ である．したがって B.3.1 節と同じ議論ができ，最適制御のプロトコルは

$$u^*(t) = -\frac{\Pi(t)}{N(t)}\langle x(t)\rangle_{\mathrm{c}} \tag{B.141}$$

で与えられることが分かる．ただし $\Pi(t)$ は (B.131) の解である．すなわち，カルマンフィルタで得られた推定値 $\langle x(t)\rangle_{\mathrm{c}}$ をそのままフィードバックして制御入力に使えばよい．$\langle x(t)\rangle_{\mathrm{c}}$ を計算するには時刻 t までに測定で得たすべての結果を使う必要があるので，このフィードバックは非マルコフ的である．ただし，B.2.3 節で論じたように，$\langle x(t)\rangle_{\mathrm{c}}$ の計算は逐次的に行えるので，各時間ステップごとの計算コストは大きくない．また，(B.131) を解く際には測定結果に関する情報は必要ない．このように，カルマンフィルタによる推定（すなわち，$\langle x(t)\rangle_{\mathrm{c}}$ の計算）と制御プロトコルの設計（すなわち，$\Pi(t)$ の計算）を独立に行える．このことを**分離定理**と呼ぶ*12)．

---

*12）以上の議論においては，評価汎関数 $J[u]$ が $x(t)$ について二次式であったことが重要である．しかし実は，評価汎関数が二次式でなくても，広い意味での分離定理が成立することが知られている．詳しくは [31] などを参照．

参考文献

以下は初等的な量子論の定評ある教科書である．

[1] J. J. サクライ，『現代の量子力学』（吉岡書店，1989）．

[2] 猪木慶治，川合光，『量子力学』（講談社，1994）．

[3] 清水明，『量子論の基礎』（サイエンス社，2004）．

数学的に厳密な量子論の定式化について，以下のような教科書がある．

[4] J. von Neumann, "*Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*" (Princeton Univ. Press, Princeton, 1955);
和訳: J. v. ノイマン，『量子力学の数学的基礎』（みすず書房，1957）．

[5] 新井朝雄，江沢洋，『量子力学の数学的構造』（朝倉書店，1999）．

[6] 新井朝雄，『ヒルベルト空間と量子力学』（共立出版，1997）．

[7] 荒木不二洋，『量子場の数理』（岩波書店，2001）．

量子測定，量子光学，量子論の基礎といったトピックについての教科書として，以下のものがある．

[8] 上田正仁，『現代量子物理学』（培風館，2004）．

[9] A. Peres, "*Quantum Theory: Concepts and Methods*" (Springer, 1993);
和訳: A. ペレス，『量子論の概念と手法』（丸善，2001）．

[10] 久我隆弘，『量子光学』（朝倉書店，2003）．

[11] 松岡正浩，『量子光学』（東京大学出版会，1996）．

[12] 古澤明，『量子光学と量子情報科学』（数理工学社，2005）．

[13] M. Mandel and E. Wolf, "*Optical coherence and quantum optics*" (Cambridge University Press, 1995).

量子情報・量子計算の標準的な教科書として以下のものがある．

[14] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, "*Quantum Computation and Quantum Information*" (Cambridge University Press, 2000);
和訳: M. ニールセン，A. チャン，『量子コンピュータと量子通信』（オーム社，2004）．

より専門的な量子情報の教科書として，以下のものがある．

[15] M. Hayashi, "*Quantum Information*" (Springer, 2006);
林正人，『量子情報理論入門』（サイエンス社，臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ–32，2004）．
前者は後者の英語版．ただし英語版と日本語版の内容は完全に同じではない．

古典統計学や古典フィッシャー情報量についての教科書・専門書として，以下のようなものが

ある．
[16] 東京大学教養学部統計学教室・編，『自然科学の統計学』（東京大学出版会，1992）．
[17] S-I. Amari, H. Nagaoka, "*Methods of Information Geometry*" (Amer Mathematical Society, 2007).

量子推定理論の専門書や論文集として，以下のものがある．

[18] A. S. Holevo, "*Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*" (Elsevier Science Ltd., 1982).
[19] M. Hayashi (ed.), "*Asymptotic Theory of Quantum Statistical Inference*" (World Scientific, 2005).

量子開放系のダイナミクス，量子連続測定，量子制御についての教科書として，以下のようなものがある．とくに [21] は，本書の第 4 章と第 5 章を執筆する上で，大いに参考にさせていただいた．

[20] D. F. Walls and G. J. Milburn, "*Quantum Optics*" (Springer, 2nd edition, 2008);
和訳: D. F. ウォールス，G. J. ミルバーン，『量子光学』（シュプリンガー，2000）．
[21] H. P. Breuer and F. Petruccione, "*The theory of open quantum systems,*" (Oxford, 2002).
[22] C. Gardiner and P. Zoller, "*Quantum Noise: A Handbook of Markovian and Non-markovian Quantum Stochastic Methods With Applications to Quantum Optics*" (Springer, Berlin, 3rd edition, 2004).
[23] H. M. Wiseman and G. J. Milburn, "*Quantum Measurement and Control*" (Cambridge University Press, 2010).
[24] K. Jacobs, "*Quantum Measurement Theory and its Applications* " (Cambridge University Press, 2014).
[25] 柴田文明，有光敏彦，番雅司，北島佐知子，『量子と非平衡系の物理』（東京大学出版会，2009）．

古典確率過程や確率微分方程式の教科書として，以下のようなものがある．このうち [28], [29] は，伝統的な物理学の手法で，伊藤公式は使わずにランジュバン方程式を解説している．なお [29] では古典推定や古典フィッシャー情報量も解説されている．また [30] では，数学者以外にも比較的とっつきやすい形で，数学的に厳密な確率過程の理論が解説されている．

[26] C. Gardiner, "*Stochastic Methods: A Handbook for the Natural and Social Sciences*" (4th edition, Springer, 2009).
[27] D. Applebaum, "*Lèvy Processes and Stochastic Calculus*" (2nd edition, Cambridge University Press, 2009).
[28] 戸田盛和，斎藤信彦，久保亮五，橋爪夏樹，『統計物理学（現代物理学の基礎 第 5 巻）』（岩波書店，新装版，2011）．
[29] 豊田正，『情報の物理学』（講談社，1997）．
[30] 岩城秀樹，『確率解析とファイナンス』（共立出版，2008）．

古典確率過程におけるカルマンフィルタや最適制御についての教科書として，以下のものがあ

る．このうち [31] は連続時間のダイナミクスを扱っており，本書の付録 B を書くうえで大変参考にさせていただいた．

[31] 大住晃，『確率システム入門』（朝倉書店，2002）．

[32] 大住晃，『非線形カルマンフィルタ』（朝倉書店，2011）．

以下は，本書で引用した論文・解説記事などである．

[33] H. Ollivier and W. H. Zurek, Quantum discord: a measure of the quantumness of correlations, Phys. Rev. Lett. **88**, 017901 (2001).

[34] T. Sagawa, Second law-like inequalities with quantum relative entropy: An introduction, arXiv:1202.0983 (2012). この論文は M. Nakahara and S. Tanaka (eds.), "*Lectures on Quantum Computing, Thermodynamics and Statistical Physics*" Kinki University Series on Quantum Computing (World Scientific, 2012) の一章として出版されている．

[35] E. H. Kennard, Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen, Z. Phys. **44**, 326 (1927).

[36] H. P. Robertson, The Uncertainty Principle, Phys. Rev. **34**, 163 (1929).

[37] E. Arthurs and J. L. Kelly, On the Simultaneous Measurement of a Pair of Conjugate Observables, Bell Syst. Tech. J. **44**, 725 (1965).

[38] E. Arthurs and M. S. Goodman, Quantum Correlations: A Generalized Heisenberg Uncertainty Relation, Phys. Rev. Lett. **60**, 2447 (1988).

[39] N. Bohr, Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?, Phys. Rev. **48**, 696 (1935).
和訳: 山本義隆（編訳），『因果性と相補性』（岩波文庫，1999），p.101-p.119.

[40] M. Ozawa, Uncertainty relations for joint measurements of noncommuting observables, Phys. Lett. A **320**, 367-374 (2004).

[41] J. F. Roch, G. Roger, P. Grangier, J.-M. Courty, and S. Reynaud, Quantum Non-Demolition Measurements in Optics: a Review and Some Recent Experimental Results, Appl. Phys. B **55**, 291-297 (1992).

[42] M. Ozawa, Uncertainty relations for noise and disturbance in generalized quantum measurements, Ann. Phys. **311**, 350-416 (2004).

[43] M. Kitano, Is the Heisenberg uncertainty relation really violated?, arXiv:0803.4377 (2008).

[44] W. Heisenberg, Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik, Z. Phys. **43**, 172 (1927). 英訳: J. A. Wheeler and H. Zurek, "*Quantum Theory and Measurement* (Princeton Univ. Press, New Jersey, 1983), p.62.

[45] Y. Takahashi, K. Honda, N. Tanaka, K. Toyoda, K. Ishikawa, and T. Yabuzaki, Quantum nondemolition measurement of spin via the paramagnetic Faraday rotation, Phys. Rev. A **60**, 4974 (1999).

[46] T. Takano, M. Fuyama, R. Namiki, and Y. Takahashi, Spin squeezing of a cold atomic ensemble with the nuclear spin of one-half, Phys. Rev. Lett. **102**, 033601 (2009).

[47] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maitre, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond, and S. Haroche, Observing the Progressive Decoherence of the "Meter" in a Quantum Measurement, Phys. Rev. Lett. **77**, 4887 (1996).

[48] C. Guerlin, J. Bernu, S. Deleglise, C. Sayrin, S. Gleyzes, S. Kuhr, M. Brune, J.-M. Raimond, and S. Haroche, Progressive field-state collapse and quantum non-demolition photon counting, Nature **448**, 889 (2007).

[49] H.P. Yuen and M. Lax, Multiple-parameter quantum estimation and measurement of nonselfadjoint observables, IEEE Trans. IT-19, 740-750 (1973).

[50] T. Sagawa and M. Ueda, Accuracy matrix in a generalized simultaneous measurement of a qubit system, Phys. Rev. A **77**, 012313 (2008).

[51] Y. Watanabe, T. Sagawa, and M. Ueda, Uncertainty relation revisited from quantum estimation theory, Phys. Rev. A **84**, 042121 (2011).

[52] D. Petz, Monotone metrics on matrix spaces, Linear Algebra Appl. **244**, 81 (1996).

[53] G. Lindblad, On the generators of quantum dynamical semigroups, Commu. Math. Phys. **48**, 119-130 (1976).

[54] 斉藤圭司，非平衡輸送現象: 輸送現象における計数統計を学ぶための基礎，物性研究 **92**, 345 (2009).

[55] V.P. Belavkin, Quantum Filtering of Markov signals with white quantum noise, Radiotechnika i Electronika **25**, 1445 (1980).

[56] A.C. Doherty and K. Jacobs, Feedback control of quantum systems using continuous state estimation, Phys. Rev. A **60**, 2700 (1999).

[57] A.C. Doherty, S. Habib, K. Jacobs, H. Mabuchi, and S.M. Tan, Quantum feedback control and classical control theory, Phys. Rev. A **62**, 012105 (2000).

[58] 山本直樹，量子フィードバック制御のための推定論とその応用，数理解析研究所講究録 **1834**, 96 (2013).

[59] L. Bouten, R. Van Handel, and M.R. James, An Introduction to Quantum Filtering, SIAM J. Control Optim. **46**, 21992241 (2007).

[60] 山本直樹，量子フィードバック制御の数理，数理科学第 50 巻 3 号，21-27 (2012).

[61] R. Inoue, R-I-R. Tanaka, R. Namiki, T. Sagawa, and Y. Takahashi, Unconditional quantum-noise suppression via measurement-based quantum feedback, Phys. Rev. Lett. **110**, 163602 (2013).

[62] T. Sagawa and M. Ueda, Second Law of Thermodynamics with Discrete Quantum Feedback Control, Phys. Rev. Lett. **100**, 080403 (2008).

[63] 沙川貴大，上田正仁，微小非平衡系における情報熱力学，日本物理学会誌 **66**, No.11, 828 (2011).

[64] 沙川貴大，情報処理の熱力学，物性研究・電子版 Vol.4, No.1, 041209（2015 年 2 月号）.

[65] R. van Handel, J.K. Stockton, and H. Mabuchi, Feedback Control of Quantum State Reduction, IEEE Trans. Automat. Contr. **50**, 768-780 (2005).

[66] N. Yamamoto, K. Tsumura, S. Hara, Feedback control of quantum entanglement in a two-spin system, Automatica **43**, 981-992 (2007).

[67] M. Mirrahimi and R. Van Handel, Stabilizing Feedback Controls for Quantum Systems, SIAM J. Control Optim. **46**, 445-467 (2007).

[68] 山本直樹，フィードバック制御による量子エンタングルメント生成，システム制御情報学会誌

49, 448-453 (2005).

[69] H. M. Wiseman and G. J. Milburn, Quantum theory of optical feedback via homodyne detection, Phys. Rev. Lett. **70**, 548 (1993).

[70] J. Gough and M. R. James, The Series Product and Its Application to Quantum Feed-forward and Feedback Networks, IEEE Trans. Automat. Contr. **54**, 2530-2544 (2009).

[71] C. W. Gardiner and M. J. Collett, Input and output in damped quantum systems: Quantum stochastic differential equations and the master equation, Phys. Rev. A **31**, 3761 (1985).

[72] B. Misra and E. C. G. Sudarshan, The Zeno's paradox in quantum theory, J. Math. Phys. **18**, 756 (1977).

[73] W. M. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger, and D. J. Wineland, Quantum Zeno effect, Phys. Rev. A **41**, 2295 (1990).

[74] B. Kaulakys and V. Gontis, Quantum anti-Zeno effect, Phys. Rev. A **56**, 1131 (1997).

[75] K. Koshino and A. Shimizu, Quantum Zeno effect by general measurements, Phys. Rep. **412**, 191 (2005).

[76] L. Viola and S. Lloyd, Dynamical suppression of decoherence in two-state quantum systems, Phys. Rev. A **58**, 2733 (1998).

[77] E. Wong and M. Zakai, On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals, Int. J. Eng. Sci. **3**, 213 (1965).

[78] K. Kanazawa, T. Sagawa, and H. Hayakawa, Stochastic Energetics for Non-Gaussian Processes, Phys. Rev. Lett. **108**, 210601 (2012).

索　引

マ

ヤ

ラ

著 者 略 歴

沙川 貴大
さがわ たかひろ

2011 年　東京大学大学院理学系研究科物理学専攻博士課程修了
　　　　　博士（理学）
2011–2012 年　京都大学白眉センター 特定助教
2013–2015 年　東京大学大学院総合文化研究科
　　　　　広域科学専攻相関基礎科学系 准教授
2015 年　東京大学大学院工学系研究科物理工学専攻 准教授
現在に至る．
専門・研究分野　統計物理，量子情報理論

上田 正仁
うえだ まさひと

1988 年　東京大学大学院理学系研究科修士過程修了
1991 年　博士（理学）
1988–1994 年　NTT 基礎研究所 研究員
1994–2000 年　広島大学工学部第二類 助教授
2000–2008 年　東京工業大学大学院理工学研究科 教授
2008 年　東京大学大学院理学系研究科 教授
現在に至る．
専門・研究分野　冷却原子気体，量子測定，量子光学，情報熱力学
主要著書
「現代量子物理学」（培風館，2004）
“Fundamentals and New Frontiers of Bose-Einstein Condensation” (World Scientific, 2010)
「東大物理学者が教える「考える力」の鍛え方」（ブックマン社，2013）
「東大物理学者が教える「伝える力」の鍛え方」（ブックマン社，2015）

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ - 123
『量子測定と量子制御』
著 者　沙川 貴大・上田 正仁
2016 年 3 月 25 日　初版発行

数 理 科 学 編 集 部　　発行人 森 平 敏 孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp まで．
表紙デザイン：長谷部貴志

発行所 ©　株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒151–0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-117：for Senior & Graduate Courses）

幾何学的に理解する
物理数学

園田　英徳　著

定価 2480 円

大学理工系の学部三年生以上を対象に物理数学の基礎事項を図を多く用い解説．最初の 4 章は高校の数学と物理の知識があれば学部一年生でも読める内容を配する．「ベクトル解析」，「空間の回転」，「微分形式」には特にページを割き，一連の内容を深く理解できるようにしている．幾何学的，視覚的イメージを伴いつつ物理数学の勘所をつかむのに適した記述，構成で，一回学んでよくわからなかったことをもう一度復習し，そのエッセンスを我が物とするにはうってつけの参考書．

第 1 章　エネルギー保存則
第 2 章　2 重積分
第 3 章　ベクトル解析
第 4 章　空間の回転
第 5 章　剛体の回転運動
第 6 章　連続の方程式
第 7 章　Legendre 変換
第 8 章　微分形式入門
第 9 章　複素解析
第10章　変分原理
付 録 A　電磁気の単位系

サイエンス社